

関数論期末試験問題

1999 年 2 月 9 日 (火)

[1] 関数

$$\frac{1}{(z^2 + 2i)^2}$$

の、虚数部が正の孤立特異点をすべて求め、その留数を計算せよ。

[2] 関数

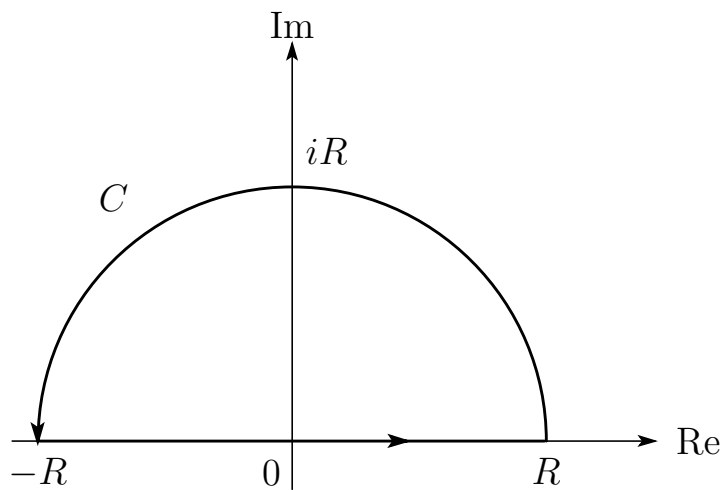
$$f(z) = \frac{1}{z^2 + 1}$$

について次の問に答えよ。

(1) 閉曲線 C を下図のようにとるとき

$$\int_C f(z) dz$$

を求めよ。ただし、 R は実数で $R > 1$ とする。



(2) (1) の結果を用いて、実積分

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2 + 1} dx = \pi$$

を示せ。

関数論中間試験問題 1999.12.14(火)

以下では i は虚数単位を表す。

[1] 複素数

$$z = \frac{\overline{(2-i)}}{(-1-i)(-1+2i)}$$

の絶対値と偏角の主値を求めよ。ただし、主値は $-\pi < \theta \leq \pi$ であるものとする。また $\bar{z}$ は z の共役複素数を表す。

[2] $z = x + iy$ に対して、円

$$(x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$$

の一次変換 $w = \frac{1}{z}$ の像を求めよ。

[3] $0, -i, 1$ をそれぞれ $i, 1, 0$ に移す一次変換を求めよ。

[4]

$$\sin z = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz})$$

は複素数平面全体で正則であることを示し、さらにその導関数 $(\sin z)'$ を求めよ。

[5] 次の方程式を満たす解をすべて求めよ。

$$(1) \quad z^4 = 1 - \sqrt{3}i, \quad 0 \leq \arg z < 2\pi$$

$$(2) \quad \cos z = i, \quad z = x + iy \quad (0 \leq x < 2\pi)$$

$$(3) \quad e^z = -2i, \quad z = x + iy \quad (0 \leq y < 2\pi)$$

関数論 期末試験問題 2000.2.15(火)

以下では i は虚数単位を表す。

- [1] 閉曲線 $C = C_1 + C_2 + C_3$ は図1で与えられる. $f(z) = \text{Im } z$ (z の虚数部) に対して, 複素積分

$$\int_C f(z) dz$$

を求めよ.

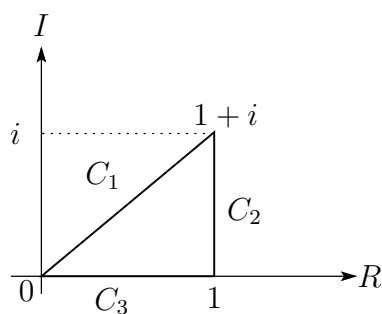


図 1

- [2] 図2の閉曲線 C に対して, 複素積分

$$\int_C \frac{1}{z^2(z+3)(z-5i)} dz$$

を求めよ.

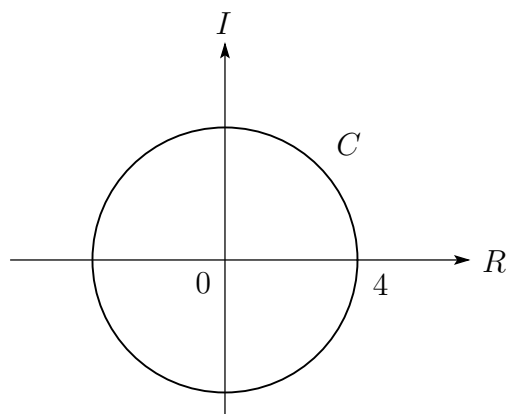


図 2

[3]

$$f(z) = \frac{1}{z^2 + 1}$$

について次の問いに答えよ.

(1) 閉曲線 C を図3のようにとるとき

$$\int_C f(z) dz$$

を求めよ. ただし, R は実数で $R > 1$ とする.

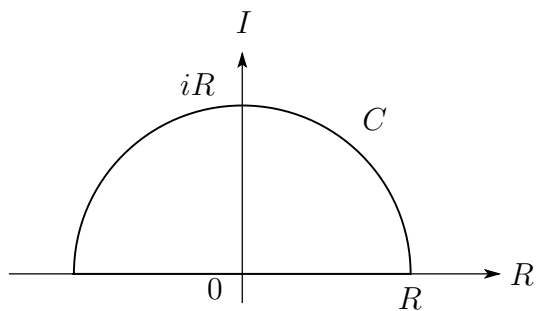


図 3

(2) (1) の結果を用いて, 実積分

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2 + 1} dx = \pi$$

を示せ. ただし, 必要があれば次の不等式を用いよ.

$$|z| > 1 \quad \text{ならば} \quad 0 < |z| - 1 \leq |z + 1|$$

関数論 中間試験問題

2000 年 12 月 12 日 (火) 実施

(注意)

(i) 解答は結果だけでなく、それに至る過程を記述すること。結果のみの解答の場合、その問の得点は 0 点とする。

(ii) 解答例については試験終了後、<http://inside.maebashi-it.ac.jp/~ken/2000test.htm> を参照のこと。

以下において、 i は虚数単位を表す。

1. (配点 5 点)

$$z^4 = -1 - i$$

を解け。

2. (配点 5 点) 指定された複素数平面上の点 z を一次変換

$$w = \frac{-3z + 1 - 3i}{iz - 1}$$

で写したときの w を作図せよ。

3. (配点 10 点) 次の関数の正則性を判定せよ。もし正則ならば導関数を求めよ。

(1)
$$f(z) = x^2 + y^2 i, \quad z = x + yi \neq 0$$

(2)
$$f(z) = \sin z$$

4. (配点 5 点)

$$\sin z = -4i$$

を解け。ただし、 $z = x + iy$, $0 \leq x < 2\pi$ とする。

5. (配点 5 点) 複素数

$$\log\left(\cos\left(\frac{\pi}{2} + i\right)\right)$$

の実部、虚部を求めよ。ただし、対数関数 $w = u + iv = \log z$ は $-\pi < v \leq \pi$ で主値をとるものとする。

以下において, i は虚数単位を表す.

1.

$$-1 - i = \sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{4}}$$

より $z = re^{i\theta}$ とおくと

$$r^4 = \sqrt{2},$$

$$4\theta = \frac{5\pi}{4} + 2n\pi.$$

$0 \leq \theta < 2\pi$ で解を求めると

$$z = 2^{1/8}e^{i\frac{5\pi}{16}}, 2^{1/8}e^{i\frac{13\pi}{16}}, 2^{1/8}e^{i\frac{21\pi}{16}}, 2^{1/8}e^{i\frac{29\pi}{16}}$$

2. 略

3. (1) 正則ではない. $u = x^2, v = y^2$ とおくと $u_x = 2x, v_y = 2y$ でコーシー・リーマンの方程式を満たさない.

(2) 正則である.

$$\sin z = \frac{e^y + e^{-y}}{2} \sin x + i \frac{e^y - e^{-y}}{2} \cos x$$

であるから

$$u = \frac{e^y + e^{-y}}{2} \sin x, v = \frac{e^y - e^{-y}}{2} \cos x$$

からコーシー・リーマンの方程式をみたす.

$$(\sin z)' = u_x + iv_x = \cos z$$

を得る.

4.

$$z = -\log(4 + \sqrt{17}), \pi - \log(\sqrt{17} - 4).$$

5.

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + i\right) = \frac{e^{-1} - e}{2}i = \frac{-e^{-1} + e}{2}e^{-i\frac{\pi}{2}}$$

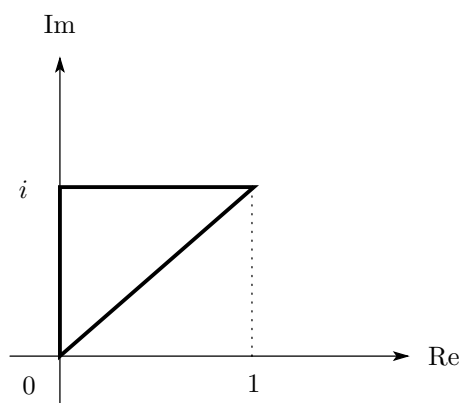
$$\log\left(\cos\left(\frac{\pi}{2} + i\right)\right) = \log \frac{e - e^{-1}}{2} - i\frac{\pi}{2}.$$

ここでは i は虚数単位を表す.

1.

$$f(z) = z + i\bar{z}$$

について, 下図の閉曲線 $C = C_1 + C_2 + C_3$ 上の複素積分を計算せよ.



以下において必要ならば留数定理を用いて良い.

2. 複素積分

$$\int_C \frac{1}{2z - i} dz$$

を計算せよ. ただし, $C : |z| = 1$ とする.

3. 複素積分

$$\int_C \frac{1}{(z^2 + 1)(z - 3)} dz$$

を計算せよ. ただし, $C : |z| = 2$ とする.

4. 複素積分

$$\int_C \frac{1}{(z + 1)(z - i)^4} dz$$

を計算せよ. ただし, $C : |z - i| = 1$ とする.

5. 複素積分の計算を利用して, 次の定積分を求めよ.

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{\cos \theta - 2} d\theta$$

ここでは i は虚数単位を表す.

1. $C_1 : z(t) = t + it, t : 0 \mapsto 1, C_2 : z(t) = t + i, t : 1 \mapsto 0, C_3 : z(t) = it, t : 1 \mapsto 0. \int_{C_1} f(z) dz = 2i, \int_{C_2} f(z) dz = -\frac{3}{2} - \frac{3}{2}i, \int_{C_3} f(z) dz = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i.$ よって

$$\int_C f(z) dz = 2i - \frac{3}{2} - \frac{3}{2}i + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i = -1.$$

2.

$$\int_C \frac{1}{2z-i} dz = 2\pi i \operatorname{Res}\left[\frac{1}{2z-i}, \frac{i}{2}\right] = 2\pi i \lim_{z \rightarrow \frac{i}{2}} \left(z - \frac{i}{2}\right) \frac{1}{2z-i} = \pi i.$$

3.

$$\int_C \frac{1}{(z^2+1)(z-3)} dz = 2\pi i \{ \operatorname{Res}\left[\frac{1}{(z^2+1)(z-3)}, i\right] + \operatorname{Res}\left[\frac{1}{(z^2+1)(z-3)}, -i\right] \} = -\frac{\pi i}{5}.$$

4.

$$\int_C \frac{1}{(z+1)(z-i)^4} dz = 2\pi i \operatorname{Res}\left[\frac{1}{(z+1)(z-i)^4}, i\right] = 2\pi i \frac{1}{3!} \lim_{z \rightarrow i} \frac{d^3}{dz^3} \left\{ (z-i)^4 \frac{1}{(z+1)(z-i)^4} \right\} = \frac{\pi i}{2}.$$

5.

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{\cos \theta - 2} d\theta = \frac{2}{i} \int_C \frac{1}{(z - \alpha_+)(z - \alpha_-)} dz.$$

ただし, $\alpha_{\pm} = 2 \pm \sqrt{3}, C : |z| = 1. 0 < \alpha_- < 1 < \alpha_+$ だから

$$\int_C \frac{1}{(z - \alpha_+)(z - \alpha_-)} dz = 2\pi i \operatorname{Res}\left[\frac{1}{(z - \alpha_+)(z - \alpha_-)}, \alpha_-\right].$$

よって

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{\cos \theta - 2} d\theta = -\frac{2\pi}{\sqrt{3}}.$$