線形代数 I(昼) 前期期末試験問題

平成 9 年 9 月 5 日 (金) 実施

[1] 3 次正方行列 $A(x,y)$ を

$$A(x,y)=\begin{pmatrix} x & 1 & 0 \\ y & 0 & 1 \\ -1 & y & 2 \end{pmatrix}$$

で定義する。次の問に答えよ。

(1) $A(x,y)$ が逆行列をもつための条件を (x,y) 平面に図示せよ。

(2) $A(-2,0)$ が正則ならば次の方法によりその逆行列を求めよ。

(i) 行基本変形による方法

(ii) 余因子行列による方法

[2] A を 3 次正方行列とする。未知数 x_1,x_2,x_3, 与えられたデータ b_1,b_2,b_3 とするとき、

$$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{b}=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix},$$

とおいて連立一次方程式

$$(*)\qquad A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$$

を考える。このとき次の問に答えよ。

(1) 方程式 $(*)$ に対して、クラメルの公式とは何か、公式そのものを書くのではなくて、どういうものを与える公式であるかを 40 字以内で記せ (句読点も一字に数える)。

(2)

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & -2 \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{b}=\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$$

のとき、方程式 $(*)$ を解け。

線形代数 I 中間試験問題

1998/6/5(金)

[1] 次の行列の逆行列を求めよ。

$$\begin{pmatrix} -3 & 2 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

[2] a を実数とするとき、つぎの非同次連立一次方程式を考える。

$$\begin{cases} x & +2y & +az & = 0 \\ -x & +ay & +2z & = 3 \\ -ax & +4y & +z & = 2a \end{cases}$$

a に関してつぎの条件を満たす領域を数直線上に図示せよ。(i) 解をただ一つ持つ、(ii) 解を無限に持つ、(iii) 解を持たない

[3] 生物の生息分布を行列計算により考察する。ある生物 は次の表の法則により行動するものとする。

すなわち、時刻によらず場所 a に居た 生物 が 1 時間後に a にとどまる確率は $\frac{1}{3}$ で、場所 b に移動する確率は $\frac{2}{3}$ である。同様に b に居た 生物 が一時間後に b にとどまる確率は $\frac{3}{4}$ で、a に移動する確率は $\frac{1}{4}$ である。

(1) a に居た生物 が 2 時間後に a に居る確率を求めよ。

(2) 行列 A を表から

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

で定義するとき、A^2 の各成分は何を表すかを答えよ。

(3) b に居る生物 は 3 時間後に a, b どちらの場所にいる可能性が高いかを答えよ。

線形代数 I 期末試験問題

平成 10 年 9 月 11 日 (金)

[1] 次の行列式を計算せよ。

(1)
$$\begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & 3 \end{vmatrix}$$

(2)
$$\begin{vmatrix} 5 & 5 & 5 & 5 & 5 \\ 5 & 4 & 4 & 4 & 4 \\ 5 & 4 & 3 & 3 & 3 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 2 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

[2] a を実数とするとき、次の連立方程式を考える。

$$\begin{cases} x + y + z & = 1 \\ ax + 2y + 3z & = 1 \\ a^2x + 4y + 9z & = 1 \end{cases}$$

(1) 方程式の係数行列が正則であるための a の条件を求めよ。

(2) (1) で求めた a の条件のもとで係数行列の逆行列を余因子行列を構成する方法で求めよ。

(3) (1) で求めた a の条件のもとでクラメルの公式を用いてこの方程式を解け。

線形代数 I 中間試験問題　1999.5.28

[1] つぎの行列の階数 (rank) を求めよ。

$$\begin{pmatrix} 9 & 10 & 11 & 12 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

[2] つぎの行列の逆行列を求めよ。

$$\begin{pmatrix} -4 & 2 & 1 & -1 \\ 4 & 3 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ -4 & 3 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

[3] a, b を実数とするとき、つぎの非同次連立一次方程式を考える。

$$\begin{cases} ax + z & = -1 \\ -y + az & = 1 \\ -ax + 2y & = b \end{cases}$$

このとき、つぎの問に答えよ。

(1) (i) 解をただ一つもつ、(ii) 解を無数にもつ、(iii) 解をもたない、の三つの場合について a, b の条件を (a, b) 平面に図示せよ。

(2) 解を無数にもつすべての場合について、解を具体的に求めよ。

線形代数 I 期末試験問題　1999.7.23

[1] 次の行列式を計算せよ.

(1)
$$\begin{vmatrix} -4 & 1 & -2 & 2 \\ 3 & 3 & -5 & 5 \\ 3 & -1 & 2 & -4 \\ 2 & 3 & -5 & 5 \end{vmatrix}$$

(2)
$$\begin{vmatrix} d & d & d & d \\ d & c & c & c \\ d & c & b & b \\ d & c & b & a \end{vmatrix}$$

[2] n 次正方行列 A が $A^2 = O$（ただし O は零行列）をみたすならば, A は正則ではないことを示せ。

[3] 3 次正方行列 $A = (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3)$ の行列式 $|A|$ は $|A| = 2$ を満たしている. このとき次の行列の行列式を計算せよ.

$$(-\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2 + \boldsymbol{a}_3,\ \boldsymbol{a}_1 - \boldsymbol{a}_2 + \boldsymbol{a}_3,\ \boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2 - \boldsymbol{a}_3)$$

[4] a, b を実数とするとき, 3 次正方行列

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & b & 0 \\ 1 & a & b \end{pmatrix}$$

を考える. 次の問に答えよ.

(1) A が正則であるための a, b の条件を求めよ.

(2) (1) の条件のもとで, 逆行列 A^{-1} を求めよ.

[5] 次の連立方程式をクラメルの公式を用いて解け.

$$\begin{cases} x + y - 2z &= -2 \\ 2x - y + z &= -7 \\ x + 2y - 3z &= 1 \end{cases}$$

[6] 3 次正方行列 $A = (a_{ij})$ の行列式 $|A|$ の定義は次の式で与えられる. ただし S_3 は 個数 3 の順列の全体を表す.

$$|A| = \sum_{(p_1, p_2, p_3) \in S_3} \mathrm{sgn}(p_1, p_2, p_3) a_{p_1 1} a_{p_2 2} a_{p_3 3}$$

この定義に従って次の行列の行列式を計算せよ.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 4 \\ 2 & -5 & 1 \end{pmatrix}$$

線形代数 I 中間試験問題　2000.6.2(金)

[1] 次の積の計算をせよ．

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

[2] 次の行列の逆行列を求めよ

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

[3] 行列の階数（rank）とは何か答えよ．

[4] a, b を実数とする．連立３元一次方程式

$$\begin{cases} x - y + 2z & = 1 \\ -ax + y & = -b \\ -x + 3y + 2z & = 5 \end{cases}$$

の解の存在について考える．

(1) 次の３つ場合について，a, b の満たすべき条件を (a, b) 平面に図示せよ．

(i) 解はただ一つ

(ii) 解は無数

(iii) 解は存在しない

(2) (i), (ii) の場合の解を表示せよ．

[5] ある都市のある時期の天気状況について次のようなデータが現れた．

	晴れ	雨
晴れ	$\frac{4}{5}$	$\frac{1}{5}$
雨	$\frac{1}{10}$	$\frac{9}{10}$

この表によると，晴れの日の翌日に晴れになる確率が $\frac{4}{5}$ であり，晴れの日の翌日に雨になる確率が $\frac{1}{5}$ である．同様に雨の日の翌日に晴れになる確率は $\frac{1}{10}$, 雨の日の翌日に雨になる確率は $\frac{9}{10}$ である．次の問に答えよ．

(1) 晴れの日の２日後に雨になる確率を求めよ．

(2) 行列 A を

$$A = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{10} & \frac{9}{10} \end{pmatrix}$$

で定義するとき A^2 の各成分は何を表すか答えよ．

(3) 晴れの日の n 日後に晴れになる確率が５０％未満になる．そのような最小の n を求めよ．

線形代数 I 中間試験問題・解答例　2000.6.2.

[1]

$$\begin{pmatrix} -12 & 0 & 12 & -24 \\ -18 & 0 & 18 & -36 \end{pmatrix}$$

[2]

$$\begin{pmatrix} -7/4 & 1 & 5/4 \\ -5/4 & 1 & 3/4 \\ 1/4 & 0 & 1/4 \end{pmatrix}$$

[3] 行列を有限回の行基本変形と列交換により，標準形に変形したときに現れる小単位行列の次数を rank という．rank は変形の仕方によらず一意的に決まる．

[4](1) $a = \frac{1}{2}$ かつ $b \neq -1$ のとき解なし．$a = \frac{1}{2}$ かつ $b = -1$ のとき解は無数．$a \neq \frac{1}{2}$ のとき解はただ一つ．

(2) 解が無数のとき，解は

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad t \text{ は実数}$$

解がただ一つのとき，解は

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2b+2}{2a-1} \\ \frac{2a+b}{2a-1} \\ \frac{4a-b-3}{4a-2} \end{pmatrix}$$

[5](1)

$$\frac{17}{50}$$

(2) $(1,1)$ 成分は晴れの日の 2 日後に晴れになる確率,
$(1,2)$ 成分は晴れの日の 2 日後に雨になる確率,
$(2,1)$ 成分は雨の日の 2 日後に晴れになる確率,
$(2,2)$ 成分は雨の日の 2 日後に雨になる確率.

(3) (2) と同じ考え方より A^n の $(1,1)$ 成分が求める確率．実際，$n = 4$ のとき

$$A^4 = \begin{pmatrix} \frac{2467}{5000} & \frac{2533}{5000} \\ \frac{2533}{10000} & \frac{7467}{10000} \end{pmatrix}$$

となって $(1,1)$ 成分は初めて 0.5 未満になる．したがって $n = 4$.

線形代数 I 昼 期末試験問題　2000.8.4.(金)

注意

- 答案用紙には学籍番号，名前を書き，表裏両面を使うこと．
- 答案用紙には答えのみでなく，それに至る過程も記述すること．
- 試験終了後，解答は `http://inside.maebashi-it.ac.jp/~ken/2000test.htm` に公表する．

[1] 次の主張をみたす x を求めよ．２次正方行列

$$\begin{pmatrix} x & 2 \\ 1 & x-1 \end{pmatrix}$$

は正則ではなく，３次正方行列

$$\begin{pmatrix} x & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

は正則である．

[2] 次の文字式を因数分解せよ．

$$\begin{vmatrix} a^3 & a^4 & a^5 \\ b^6 & b^7 & b^8 \\ c^9 & c^{10} & c^{11} \end{vmatrix}$$

[3] a を 0 でない実数とするとき，次の３次正方行列を考える．

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -a & a & 3a \\ 2a^2 & a^2 & -4a^2 \end{pmatrix}$$

(1) 行列式 $|A|$ の第３列の余因子展開を行い，$|A|$ を２次の行列式の和で表せ．
(2) A の逆行列を求めよ．
(3) 連立方程式

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}$$

を解け．

線形代数 I 昼 期末試験問題・解答　2000.8.4.(金)

[1]

$$x = -1$$

[2]

$$a^3b^6c^9(a-b)(b-c)(c-a)$$

[3] (1)

$$|A| = \begin{vmatrix} -a & a \\ 2a^2 & a^2 \end{vmatrix} - 3a \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2a^2 & a^2 \end{vmatrix} - 4a^2 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -a & a \end{vmatrix}$$

(2)

$$A^{-1} = -\frac{1}{12a^2} \begin{pmatrix} -7a^2 & -3a & -4 \\ 2a^2 & -6a & -4 \\ -3a^2 & -3a & 0 \end{pmatrix}$$

(3)

$$x = \frac{-21a^2 + 18a + 8}{12a^2}$$

$$y = \frac{3a^2 + 18a + 4}{6a^2}$$

$$z = \frac{-3a + 6}{4a}$$

２００１線形代数 I 昼 中間試験問題

実施日：2001 年 6 月 8 日 (金)

[1] 次の行列 A, B について考える。

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 3 & -4 & -3 \\ 3 & -1 & -4 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 3 & -5 \\ 3 & 6 & 1 & -4 \\ 3 & 3 & 2 & -3 \\ -1 & 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

(1) 積 AB を計算せよ。ただし，結果のみでなく計算の過程を明示せよ。

(2) 基本変形を用いて，A の逆行列を求めよ。

[2] a, b を実数とするとき，次の連立方程式を考える。

$$\begin{cases} 3x + 4y + az = 1 \\ 2x + 3y + 9z = b \\ 5x + 7y + 20z = -5 \end{cases}$$

方程式が (i) 解をただ一つ持つ，(ii) 解を無数に持つ，(iii) 解を持たない，条件を (a, b) 平面に図示せよ。

[3] 次の連立方程式を考える。

$$\begin{cases} x - y - 4z + 3w = 1 \\ 3x + z - 2w = -2 \\ x + 2y + 9z - 8w = -4 \end{cases}$$

(1) 係数行列の階数（rank）を求めよ。

(2) 方程式を解け。

２００１線形代数 I 昼 中間試験問題・解答例

実施日：2001 年 6 月 8 日 (金)

[1] (1) $AB = E_4$（単位行列）

(2) 基本変形により $A^{-1} = B$

[2] $a \neq 11$ のとき解をただ一つ持つ、$a = 11$ かつ $b = -6$ のとき解を無数に持つ、$a = 11$ かつ $b \neq -6$ のとき解を持たない。

[3] (1) 2

(2)

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} -1/3 \\ -13/3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2/3 \\ 11/3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2/3 \\ -5/3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad （t, s \text{ は実数}）$$

２００１線形代数 I 昼 期末試験問題

実施日：2001 年 8 月 3 日 (金) 2 限

[1] 次の行列式を計算せよ.

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 5 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 4 \end{vmatrix}$$

[2] 次の行列の正則性を判定せよ.

$$\begin{pmatrix} 48 & 49 & 50 \\ 51 & 52 & 53 \\ 54 & 55 & 56 \end{pmatrix}$$

[3] 次の連立方程式をクラメルの公式を用いて解け.

$$\begin{cases} 3x + 2y + 4z = 2 \\ 5x + 6y + 3z = 1 \\ 2x + 2y + 4z = -3 \end{cases}$$

[4] $a = 1 - \sqrt{5}$, $b = 1 + \sqrt{5}$ に対して，次の行列の逆行列を余因子行列による方法で求めよ.

$$\begin{pmatrix} a & 1 & b \\ 1 & 1 & 1 \\ a^2 & 1 & b^2 \end{pmatrix}$$

２００１線形代数 I 昼 期末試験問題・解答例

実施日：2001 年 8 月 3 日 (金) 2 限

[1] -82

[2]

$$\begin{vmatrix} 48 & 49 & 50 \\ 51 & 52 & 53 \\ 54 & 55 & 56 \end{vmatrix} = 0$$

であるので，正則ではない．

[3] クラメルの公式を直接用いると

$$x = 5, \quad y = -\frac{19}{6}, \quad z = -\frac{5}{3}$$

[4] $a + b = 2$, $ab = -4$, $b - a = 2\sqrt{5}$, $a^2 - 2a - 4 = 0$, $b^2 - 2b - 4 = 0$ であることに注意．

$$\begin{vmatrix} a & 1 & b \\ 1 & 1 & 1 \\ a^2 & 1 & b^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a-1 & 0 & b-1 \\ 1 & 1 & 1 \\ a^2-1 & 0 & b^2-1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a-1 & b-1 \\ a^2-1 & b^2-1 \end{vmatrix} = (ab - (a+b) + 1)(b-a) = -10\sqrt{5}.$$

さらに

$$\tilde{a_{11}} = \begin{vmatrix} 1 & b \\ 1 & b^2 \end{vmatrix} = b^2 - 1 = 2b + 3 = 5 + 2\sqrt{5}.$$

$$\tilde{a_{12}} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a^2 & b^2 \end{vmatrix} = -(b^2 - a^2) = -(b+a)(b-a) = -4\sqrt{5}.$$

以下同様にして $\tilde{a_{13}} = -5 + 2\sqrt{5}$, $\tilde{a_{21}} = -5 - \sqrt{5}$, $\tilde{a_{22}} = -8\sqrt{5}$, $\tilde{a_{23}} = 5 - \sqrt{5}$, $\tilde{a_{31}} = -\sqrt{5}$, $\tilde{a_{32}} = 2\sqrt{5}$, $\tilde{a_{33}} = -\sqrt{5}$ を得る．したがって，逆行列は

$$-\frac{1}{10\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 5 + 2\sqrt{5} & -5 - \sqrt{5} & -\sqrt{5} \\ -4\sqrt{5} & -8\sqrt{5} & 2\sqrt{5} \\ -5 + 2\sqrt{5} & 5 - \sqrt{5} & -\sqrt{5} \end{pmatrix}.$$

解答は結果だけでなく，それに至る過程を記述すること．結果のみの解答の場合，その問の得点は 0 点とする．

[1] 次の連立方程式を解け．

$$\begin{cases} x+3y+2z &= 1 \\ x+5y+8z &= 7 \\ 2x+6y+6z &= 3 \end{cases}$$

[2] 次の行列の逆行列を求めよ．

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 5 & -1 & 3 \\ 3 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

[3] 次の行列の rank（階数）を求めよ．

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 5 & 1 \\ 1 & 3 & 6 & -1 \\ -4 & -2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

[4] a, b を実数とするとき，次の連立方程式を考える．

$$\begin{cases} x+y+2z &= b \\ -x+ay+z &= 2 \\ 2x+y-z &= 3 \end{cases}$$

(1) (a, b) 平面に次の条件を満たす範囲を明示せよ．
  (i) 解がただ一つ
  (ii) 解が無数
  (iii) 解を持たない
(2) (1) の (ii) の場合に，具体的に解をパラメータ表示せよ．

[5] 行列の積に関する次の等式をみたす x を求めよ．

$$\begin{pmatrix} 4 & x & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & 4 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 10$$

[6] (m, n) 行列 $A = (a_{ij})$ と (n, ℓ) 行列 $B = (b_{ij})$ の積は

$$AB = \left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} \right)_{i=1,2,\ldots,m;\, j=1,2,\ldots,\ell}$$

で与えられる．これを用いて，n 次の単位行列 $E_n = (e_{ij})$ について $AE_n = A$ と $E_n B = B$ を示せ．

[1]

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9/2 \\ 3/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}.$$

[2]

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/4 & 1/4 & -1/4 \\ 11/4 & -5/4 & 1/4 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

[3] $\operatorname{rank} A = 3$.

[4] 拡大係数行列

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & b \\ -1 & a & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

は基本変形により

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 3-b \\ 0 & 1 & 5 & 2b-3 \\ 0 & 0 & 3-5(a+1) & b+2-(2b-3)(a+1) \end{pmatrix}$$

になる．したがって

(i) $3-5(a+1) \neq 0$ ならば解はただひとつ．すなわち，$a \neq -2/5$.

(ii) $3-5(a+1) = 0$ かつ $b+2-(2b-3)(a+1) = 0$ ならば解は無数．すなわち，$a = -2/5$, $b = 19$.

(iii) $3-5(a+1) = 0$ かつ $b+2-(2b-3)(a+1) \neq 0$ ならば解を持たない．すなわち，$a = -2/5$ かつ $b \neq 19$.

さらに解を無数に持つ場合，拡大係数行列は

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & -16 \\ 0 & 1 & 5 & 35 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

よって

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -16 \\ 35 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

[5] $x = -50$.

[6] AE_n の (i,j) 成分は

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik} e_{kj}.$$

$e_{kj} = 1$ $(k = j)$, $e_{kj} = 0$ $(k \neq j)$ であるので

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik} e_{kj} = a_{ij} e_{jj} = a_{ij}.$$

よって $AE_n = A$ を得る．$E_n B = B$ についても同様.

[**1**] つぎの行列式を計算せよ．

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

[**2**] つぎの行列の逆行列を求めよ．ただし，**基本変形による方法を用いてはいけない**．

$$\begin{pmatrix} 21 & 22 & 23 \\ 22 & 22 & 23 \\ 23 & 23 & 23 \end{pmatrix}$$

[**3**] つぎの行列が逆行列を持つための a, b, c の条件を求めよ．

$$\begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{pmatrix}$$

[**4**] つぎの各問に答えよ．

(1) n 次正方行列 A, B は行列式が $|A| = 5$, $|B| = 3$ である．このとき，2 つの行列式 $|(AB)^{-1}|$, $|B^{-1}AB|$ を計算せよ．

(2) 3 次正方行列 $A = (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3)$ は列ベクトル表示されている．さらに行列式は $|A| = 3$ である．このとき，つぎの行列式を計算せよ．

$$|2\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 - 3\mathbf{a}_3,\ \mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_3,\ \mathbf{a}_2 + 4\mathbf{a}_3|$$

[**1**] 0

[**2**]

$$|A| = 23, \quad A^{-1} = \frac{1}{23}\begin{pmatrix} -23 & 23 & 0 \\ 23 & -46 & 23 \\ 0 & 23 & -22 \end{pmatrix}$$

[**3**]

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = (a-b)(b-c)(c-a)$$

であるので，a, b, c が相異なることが A が正則であるための条件である．

[**4**] (1) $|(AB)^{-1}| = 1/15$, $|B^{-1}AB| = 5$

(2) -15

解答は結果だけでなく，それに至る過程を記述すること．結果のみの解答の場合，その問の得点は 0 点とする．特に行列の基本変形を行うときはどの変形を行ったかを明示すること．

[1] 次の行列の逆行列を求めよ．

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

[2] 次の連立方程式を解け．

$$\begin{cases} 3x + y + 4z + 4w &= 6 \\ -x + 7y + 6z &= -8 \\ 3y + 3z + 7w &= 4 \\ x + 4y + 5z + 2w &= -1 \end{cases}$$

[3] 次の行列の rank（階数）を求めよ．

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 12 & -9 & -1 \\ 6 & 7 & -5 & -1 \\ 4 & 2 & -1 & -1 \\ 2 & -3 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

[4] a, b を実数とするとき，次の連立方程式を考える．

$$\begin{cases} 2x + 2y - z &= 1 \\ 2x + y - 4z &= 0 \\ 4x + 5y + az &= b \end{cases}$$

(1) それぞれ次の結果が従う a, b の条件を求めよ．
(i) 解がただ一つ　(ii) 解が無数　(iii) 解を持たない

(2) (1) の (ii) の場合に，具体的に解をパラメータ表示せよ．

[5] (m, n) 行列 $D = (d_{ij})$ と (n, ℓ) 行列 $A = (a_{ij})$ の積は

$$DA = \left(\sum_{k=1}^{n} d_{ik} a_{kj} \right)_{i=1,2,\ldots,m;\ j=1,2,\ldots,\ell}$$

で与えられる．これを用いて次の分配則を示せ：
D が (m, n) 行列，A, B を (n, ℓ) 行列とするとき

$$D(A + B) = DA + DB$$

[**解答例**]

[1]

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -1 & 5 & -3 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

[2]

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

拡大係数行列：

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 & 4 & 6 \\ -1 & 7 & 6 & 0 & -8 \\ 0 & 3 & 3 & 7 & 4 \\ 1 & 4 & 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

[3] $\operatorname{rank} A = 2$.

[4] 拡大係数行列：

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -4 & 0 \\ 4 & 5 & a & b \end{pmatrix} \to\to \cdots \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -7/2 & -1/2 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & a-1 & b-3 \end{pmatrix}$$

よって (i) $a \neq 1$ ならば解がただ一つ　(ii) $a = 1$ かつ $b = 3$ ならば解が無数　(iii) $a = 1$ かつ $b \neq 3$ ならば解を持たない．

$a = 1, b = 3$ のとき，解は

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 7/2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

[5] $A + B = (a_{ij} + b_{ij})$.

$$(D(A+B))_{ij} = \sum_{k=1}^{n} d_{ik}(a_{kj}+b_{kj}) = \sum_{k=1}^{n}(d_{ik}a_{kj}+d_{ik}b_{kj}) == \sum_{k=1}^{n} d_{ik}a_{kj}+\sum_{k=1}^{n} d_{ik}b_{kj} = (DA)_{ij}+(DB)_{ij}.$$

解答は結果だけでなく，それに至る過程を記述すること．結果のみの解答の場合，その問の得点は 0 点とする．

[1] 次の行列式を計算せよ．

$$\begin{vmatrix} -1 & 3 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & 2 \\ 4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

[2] 次の行列の逆行列を（もし存在するならば）求めよ．

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 0 \\ 2 & 11 & 7 \\ 0 & 4 & 9 \end{pmatrix}$$

[3] 次の行列式を計算し因数分解せよ．

$$\begin{vmatrix} a+b+c & -c & -b \\ -c & a+b+c & -a \\ -b & -a & a+b+c \end{vmatrix}$$

[4]

$$P = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

とおく．$AB = P$ をみたす 3 次正方行列 A, B が存在するとき，A, B はともに正則であることを示せ．

[解答例]

[1] -99

[2]

$$A^{-1} = \frac{1}{123}\begin{pmatrix} 71 & -45 & 35 \\ -18 & 27 & -21 \\ 8 & -12 & 23 \end{pmatrix}$$

[3] $2(a+b)(b+c)(c+a)$

[4] $|P| = 46 \neq 0$. よって積の性質から $0 \neq |P| = |AB| = |A||B|$. これは $|A|, |B| \neq 0$ を与える．よって A, B 共に正則である．

解答は結果だけでなく，それに至る過程を記述すること．結果のみの解答の場合，その問の得点は 0 点とする．

[**1**] ３次正方行列 $\begin{pmatrix} 2 & 1 & x \\ 3 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & -2 \end{pmatrix}$, x は実数とする，について

(1) $x = 2$ のとき，基本変形による方法で逆行列を求めよ．

(2) $x = -3$ のとき，余因子行列を構成する方法で逆行列を求めよ．

[**2**] a, b は実数である．連立方程式 $\begin{cases} 2x + y &= 0 \\ x + ay &= 0 \\ by + z &= 0 \end{cases}$ が，$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ 以外に解を無数にもつための a, b の条件を求め，そのときの解を表示せよ．

[**3**] 行列式 $\begin{vmatrix} 50 & -60 & 50 & -100 \\ -60 & -60 & 50 & -100 \\ 50 & 50 & 50 & -100 \\ -100 & -100 & -100 & -100 \end{vmatrix}$ の値は $a \times 10^m$ $(1 \leqq a < 10;\ m = 0, 1, 2, \cdots)$ である．a, m を求めよ．

[**4**] A は n 次正方行列で，E_n は n 次の単位行列である．このとき，$XA = E_n$ ならば $AX = E_n$ であることを示せ．

K.U.

[解答例] [1](1) $\begin{pmatrix} -7 & 8 & -3 \\ 9 & -10 & 4 \\ 3 & -3 & 1 \end{pmatrix}$ (2) $\dfrac{-1}{14}\begin{pmatrix} -7 & -7 & 7 \\ 9 & 5 & -11 \\ 3 & -3 & 1 \end{pmatrix}$

[2] 拡大係数行列を作り,

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & b & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{1\text{ 行と }2\text{ 行の交換}} \begin{pmatrix} 1 & a & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & b & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{(2,1)\text{ 成分の掃き出し}} \begin{pmatrix} 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 1-2a & 0 & 0 \\ 0 & b & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$(2,2)$ 成分で軸が出来るか否かで場合分け.

(i) $\underline{1-2a \neq 0 \text{ のとき}}$. $\to \cdots \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ となって，ただ一つ.

(ii) $\underline{1-2a = 0 \text{ のとき}}$，すなわち $a = 1/2$ のとき.

$$\begin{pmatrix} 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 1-2a & 0 & 0 \\ 0 & b & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{2\text{ 行と }3\text{ 行の交換}} \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & b & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

b について場合分け.

(ii-I) $\underline{b \neq 0 \text{ のとき}}$.

$$\begin{pmatrix} 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1/b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{2\text{ 行を }1/b\text{ 倍}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -a/b & 0 \\ 0 & 1 & 1/b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1/2b & 0 \\ 0 & 1 & 1/b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{標準形.}$$

一方,

(ii-II) $\underline{b = 0 \text{ のとき}}$. $\begin{pmatrix} 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{2\text{ 列と }3\text{ 列の交換}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 標準形を得る.

以上をまとめると，$a = 1/2$ のときは b の値によらず解を無数にもつ．よって求める条件は $\underline{a = 1/2}$.

解の表示については，$\underline{a = 1/2 \text{ かつ } b \neq 0 \text{ のとき}}$, $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} 1/(2b) \\ -1/b \\ 1 \end{pmatrix}$. 一方,

$\underline{a = 1/2 \text{ かつ } b = 0 \text{ のとき}}$, $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} -1/2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. いずれも t は実数.

[3] 列，行のスカラー倍の性質から

$$\begin{vmatrix} 50 & -60 & 50 & -100 \\ -60 & -60 & 50 & -100 \\ 50 & 50 & 50 & -100 \\ -100 & -100 & -100 & -100 \end{vmatrix} \overset{\text{1 から 4 列について}}{=} 100\cdot 50\cdot 10\cdot 10 \begin{vmatrix} 5 & -6 & 1 & -1 \\ -6 & -6 & 1 & -1 \\ 5 & 5 & 1 & -1 \\ -10 & -10 & -2 & -1 \end{vmatrix}$$

$$\overset{\text{4 列に 3 列を加える}}{=} 5\cdot 10^5 \begin{vmatrix} 5 & -6 & 1 & 0 \\ -6 & -6 & 1 & 0 \\ 5 & 5 & 1 & 0 \\ -10 & -10 & -2 & -3 \end{vmatrix}$$

$$\overset{\text{4 列で余因子展開}}{=} -15\cdot 10^5 \begin{vmatrix} 5 & -6 & 1 \\ -6 & -6 & 1 \\ 5 & 5 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\overset{\text{1 行に 2 行の } (-1) \text{ 倍を足す}}{=} -15\cdot 10^5 \begin{vmatrix} 11 & 0 & 0 \\ -6 & -6 & 1 \\ 5 & 5 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\overset{\text{1 行で余因子展開}}{=} -15\cdot 11\cdot 10^5 \begin{vmatrix} -6 & 1 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = 1.815\cdot 10^8$$

[4] $|XA| = |E_n| = 1$, $|XA| = |X||A|$ より，$|X| \neq 0$. X は正則であり，X^{-1} をもつ．よって $XA = E_n$ ならば $AX = E_nAX = (X^{-1}X)AX = X^{-1}(XA)X = X^{-1}E_nX = E_n$.

KU

追：問題 [2] について，学生の中にきれいな解答がありました．紹介します．
係数行列について，

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & a & 0 \\ 0 & b & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{2 行と 1 行の交換}} \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & b & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{(2,1)\text{ 成分の掃き出し}} \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1-2a & 0 \\ 0 & b & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{2 行と 3 行の交換}} \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & b & 1 \\ 0 & 1-2a & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{2 列と 3 列の交換}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1-2a \end{pmatrix}.$$

対角成分に 1 が 2 つ並ぶので，解が無数に出るには $1-2a=0$ でなければならない．このとき b は何でもよい．$a = 1/2$ として方程式を解くと $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} -1/2 \\ 1 \\ -b \end{pmatrix}$.（実際，解答例の解の形とこの解の形は一致します．こちらの方が良い！）良く考えていると思います．

解答は結果だけでなく，それに至る過程を記述すること．結果のみの解答の場合，その問の得点は 0 点とする．

[**1**] 次の行列のランク (rank) を求めよ．
$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 & 3 & -1 \\ -2 & 1 & 0 & 3 & 1 \\ 5 & -2 & 2 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & 0 & -3 & -1 \end{pmatrix}$$

[**2**] 行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 9 & 6 & 6 \\ 0 & 6 & 2 & 2 \\ 3 & 25 & 26 & 33 \\ 4 & 0 & 9 & 10 \end{vmatrix}$ を計算せよ．

解答は結果だけでなく，それに至る過程を記述すること．結果のみの解答の場合，その問の得点は 0 点とする．検算が行えるものについては必ず行うこと（これは自分のためです）．

1. (1) 正方行列 A が正則であることの定義を述べよ．
   (2) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ とする．B が A の逆行列であることを (1) の定義に従って説明せよ．

2. 行列 $\begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ の逆行列を <u>はき出し法</u> に従って求めよ．

3. 連立方程式 $\begin{cases} 3x - z + 2w & = 4 \\ -x - 2w & = -1 \\ 2x - y + z + 4w & = 0 \\ 3x + y - 3z - 2w & = 7 \end{cases}$ を解け．

4. 行列式 $\begin{vmatrix} 5 & 2 & 3 & 2 \\ 4 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & 0 \end{vmatrix}$ の値を求めよ．

5. 行列 $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -6 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ の逆行列を <u>余因子行列を構成する方法</u> で求めよ．

6. n 次正方行列 A の余因子行列 $\tilde{A}$ について，A が正則ならば $|\tilde{A}| = |A|^{n-1}$ を示せ．

7. 行列式 $\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 1 & b & b^2 & b^3 \\ 1 & c & c^2 & c^3 \\ 1 & d & d^2 & d^3 \end{vmatrix}$ の値を因数分解した形で与えよ．

8. ３次正方行列について，異なる２つの列を交換すると行列式の符号が反転することを行列式の定義から導け．

K.U.

[解答例] 1.　(1)　$AX = XA = E_n$, E_n は単位行列，をみたす正方行列 X が存在するとき，A を正則という．

(2)　直接の計算から $AB = BA = E_2$ であるので，B は A の逆行列である．

2.　$\dfrac{1}{30}\begin{pmatrix} 4 & -6 & 7 \\ -8 & 12 & 1 \\ 2 & 12 & -4 \end{pmatrix}$

3.　$t\begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$　(t は実数)

4.　-30

5.　$\begin{pmatrix} -5 & 2 & 1 \\ 9 & -3 & -2 \\ -13 & 5 & 3 \end{pmatrix}$

6.　$A\tilde{A} = |A|E_n$ である．E_n は単位行列．両辺，行列式を取ると，左辺は $|A\tilde{A}| = |A||\tilde{A}|$．右辺は $||A|E_n| = |A|^n|E_n| = |A|^n$．ゆえに $|A||\tilde{A}| = |A|^n$．A は正則であるから $|A| \neq 0$．よって $|A|$ で割ると $|\tilde{A}| = |A|^{n-1}$．

7.　$(b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-b)(d-c)$

8.　$A = (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3)$ と列ベクトル表示する．２列と３列を交換して $(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_2)$ の行列式を調べる．行列式の定義に従い

$$\begin{aligned} |\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_2| &= \sum_{(p_1,p_2,p_3)\in S_3} \mathrm{sign}\,(p_1,p_2,p_3) a_{p_1\,1} a_{p_2\,3} a_{p_3\,2} \\ &= \sum_{(p_1,p_2,p_3)\in S_3} \mathrm{sign}\,(p_1,p_2,p_3) a_{p_1\,1} a_{p_3\,2} a_{p_2\,3}. \end{aligned}$$

ここで，$\mathrm{sign}\,(p_1,p_2,p_3) = -\mathrm{sign}\,(p_1,p_3,p_2)$ であることに注意すると，

$$\begin{aligned} |\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_2| &= \sum_{(p_1,p_3,p_2)\in S_3} -\mathrm{sign}\,(p_1,p_3,p_2) a_{p_1\,1} a_{p_3\,2} a_{p_2\,3} \\ &= -|\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3|. \end{aligned}$$

K.U.

解答は結果だけでなく，それに至る過程を記述すること．結果のみの解答の場合，その問の得点は 0 点とする．検算が行えるものについては必ず行うこと（これは自分のためです）．

1. 次の行列を標準形に変形してランク (rank) を求めよ.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 & 2 \\ -1 & 4 & -6 & 13 & -10 \\ 3 & 1 & 5 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

2. 次の行列式の値を求めよ.

$$\begin{vmatrix} 121 & 122 & 123 \\ 122 & 122 & 123 \\ 123 & 123 & 123 \end{vmatrix}$$

K.U.

[解答] 1.　rank $A = 2$

2.　123

K.U.