線形代数I(夜) 前期期末試験問題

平成9年9月8日(月)実施

[1] つぎの行列の計算をせよ。

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 4 & 3 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 9 \end{pmatrix}$$

[2] 行基本変形を用いて次の連立方程式を解け。

$$\begin{cases} 2x & -y & +2z & = & 2 \\ x & -y & +z & = & -2 \\ x & +2y & -z & = & 7 \end{cases}$$

[3] 行基本変形を用いて次の行列の逆行列を求めよ。

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

[4] 次の行列の行列式を求めよ。

$$\begin{pmatrix} -4 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -4 \end{pmatrix}$$

[5] 3次正方行列

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -3 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

に対して次の問に答えよ。

(1) A の余因子行列をつくれ。

(2) A の行列式を計算することで A が正則であることを示せ。

(3) 前問 (1), (2) を用いて A の逆行列を求めよ。

[6] クラメルの公式を用いて次の連立方程式を解け。

$$\begin{cases} x & +y & -2z & = & -2 \\ 2x & -y & +z & = & -7 \\ x & +2y & -3z & = & 1 \end{cases}$$

線形代数 I 中間試験問題

1998/6/15(月)

* 答案作成時の注意

- 結果のみでなく**過程**も記述すること。
- 時間が余ったらできる限りの**検算**をしてケアレスミスの防止に努めること。

[1] ２つの行列 A, B を考える。ただし a は実数とする。

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & a \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$AB = BA$ をみたす a を求めよ。

[2] 次の行列の逆行列を求めよ。

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

[3] つぎの同次連立一次方程式を解け。

$$\begin{cases} x & +y & +2z & = 0 \\ 4x & -y & +z & = 0 \\ 3x & -2y & -z & = 0 \end{cases}$$

[4] つぎの非同次連立一次方程式について、解が存在するならば解を求めよ。存在しないならば解なしと答えよ。

$$\begin{cases} 3x & +y & -2z & = 2 \\ x & +2y & +z & = 3 \\ -3x & +4y & +7z & = 3 \end{cases}$$

線形代数 I 期末試験問題

平成 10 年 9 月 14 日 (月)

[1] 次の行列式を計算せよ。

$$\begin{vmatrix} 6 & 6 & 6 \\ 6 & 5 & 5 \\ 6 & 5 & 4 \end{vmatrix}$$

[2] 次の行列式を計算せよ。

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 1 & 3 \\ 4 & 4 & 2 & 2 \\ 1 & 7 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

[3] 次の行列を考える。

$$A = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

(1) 行列 A の各成分の余因子をすべて計算せよ。

(2) (1) の結果を利用して A の逆行列を求めよ。

線形代数 I 中間試験問題　1999.6.7(月)

[1] 次の行列の計算をせよ。

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

[2] つぎの行列の逆行列を求めよ。

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

[3] 次の連立方程式を解け。

(1)

$$\begin{cases} x + 3y - 5z & = 1 \\ 2x + 4y - 5z & = 3 \\ 3x + 8y - 12z & = -2 \end{cases}$$

(2)

$$\begin{cases} x + y - z & = 0 \\ 2x + 3y - 4z & = 0 \\ x + 2y - 3z & = 0 \end{cases}$$

線形代数 I 期末試験問題　1999.7.26

[1] 次の行列式を計算せよ.

$$\begin{vmatrix} -2 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & -3 \\ 3 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 6 & 1 & -4 \end{vmatrix}$$

[2] つぎの行列式を第 3 行で余因子展開せよ.

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$$

[3] つぎの 3 次正方行列の逆行列を余因子行列を作る方法で求めよ.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 8 \\ 1 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$

[4] 次の連立方程式をクラメルの公式を用いて解け.

$$\begin{cases} x - 2y + z &= 7 \\ x + y - z &= 0 \\ 2x - y + 3z &= 13 \end{cases}$$

線形代数 I 中間試験問題　2000.6.5(月)

[1] 次の積の計算をせよ.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \end{pmatrix}$$

[2] 次の行列の階数（rank）を求めよ.

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -4 & -1 & 5 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

[3] 次の行列の逆行列を求めよ.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

[4] 次の連立方程式を解け.

$$\begin{cases} 2x + y - z + 9w & = 1 \\ -x + 3y + 4z - w & = 2 \end{cases}$$

[5] a を実数とするとき，次の連立方程式を考える.

$$\begin{cases} -x + 2y + z & = 0 \\ 3x - 5y + az & = 3 \\ x + ay - z & = 0 \end{cases}$$

次の３つ場合について，a の満たすべき条件を求めよ.

(i) 解を唯一つもつ.

(ii) 解を無数にもつ.

(iii) 解をもたない.

線形代数 I 中間試験問題・解答例　　2000.6.5.

[1]

$$\begin{pmatrix} 18 \\ -14 \end{pmatrix}$$

[2] 標準形は

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -7/5 \\ 0 & 1 & 3/5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ゆえに $\operatorname{rank} A = 2$.

[3]

$$\begin{pmatrix} 7 & 4 & -2 \\ -2 & -1 & 1 \\ -3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

[4]

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/7 \\ 5/7 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad t,\, s \text{ は実数}$$

[5]

$$\begin{cases} a = -3 & \Longrightarrow \text{解をもたない} \\ a = -2 & \Longrightarrow \text{解は無数} \\ a \neq -2, -3 & \Longrightarrow \text{解は唯一つ} \end{cases}$$

線形代数 I 夜 期末試験問題　2000.7.31(月)

注意

- 答案用紙には学籍番号，名前を書き，表裏両面を使うこと．
- 答案用紙には答えのみでなく，それに至る過程も記述すること．
- 試験終了後，解答は `http://inside.maebashi-it.ac.jp/~ken/2000test.htm` に公表する．

[1] 次の行列式を計算せよ．

(1)
$$\begin{vmatrix} 4 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 5 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

(2)
$$\begin{vmatrix} 2 & 2^2 & 2^3 \\ 3 & 3^2 & 3^3 \\ 4 & 4^2 & 4^3 \end{vmatrix}$$

[2] 次の３次正方行列を考える．

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$

(1) 余因子行列を構成する方法を用いて逆行列を求めよ．
(2) (1) の検算をせよ．

[3] 次の連立方程式を考える．

$$\begin{cases} 41x - 17y &= -13 \\ 3x + 11y &= 9 \end{cases}$$

(1) クラメルの公式を用いて解け．
(2) (1) の検算をせよ．

線形代数 I 夜 期末試験問題・解答例　2000.7.31.(月)

[1] (1) -62　(2) 48

[2] (1)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1/2 & -1/2 \\ 2/3 & -2/3 & 1/3 \\ -2/3 & 1/6 & 1/6 \end{pmatrix}$$

(2) 元の行列と逆行列を掛け算して単位行列になることを確かめる.

[3] (1) $x = 5/251$　$y = 204/251$　(2) 略

２００１線形代数 I 夜 中間試験問題

実施日：2001 年 6 月 8 日 (金) 6 限

[1] 次の積を計算せよ。

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

[2] 次の行列の逆行列を求めよ。

$$\begin{pmatrix} 3 & 7 & -3 \\ 1 & 4 & -2 \\ -5 & -7 & 2 \end{pmatrix}$$

[3] 次の連立方程式を解け。

$$\begin{cases} x - y + z + w = 2 \\ 2x - y - 2z - 2w = 1 \\ x + y - 7z - 7w = -4 \\ 3x - y - 5z - 5w = 0 \end{cases}$$

[4] 連立方程式

$$\begin{cases} x - dy = -1 \\ ax + y = 2 \end{cases}$$

を考える。ただし，a, d は実数とする。解を無数に持つための条件を求め，そのときの解を表示せよ。

２００１線形代数 I 夜 中間試験問題・解答例

実施日：2001 年 6 月 8 日 (金) 6 限

[1]

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 17 \end{pmatrix}$$

[2]

$$\begin{pmatrix} 6 & -7 & 2 \\ -8 & 9 & -3 \\ -13 & 14 & -5 \end{pmatrix}$$

[3]

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

[4]

$$a = -2, \quad d = \frac{1}{2}.$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

２００１線形代数 I 夜 期末試験問題

実施日：2001 年 8 月 3 日 (金) 6 限

[1] 次の行列式を求めよ.

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 3 & 0 \end{vmatrix}$$

[2] 次の行列について以下の問に答えよ.

$$\begin{pmatrix} 3 & 7 & -3 \\ 1 & 4 & -2 \\ -5 & -7 & 2 \end{pmatrix}$$

(1) 第 2 列における余因子展開と第 3 行における余因子展開を行い，値が等しいことを検証せよ.

(2) 余因子行列による方法で逆行列を求めよ.

[3] 二次方程式 $t^2 - 2t - 1 = 0$ の 2 実解 a, b $(a < b)$ について，次の連立方程式をクラメルの公式を用いて解け.

$$\begin{cases} ax - by & = 1 \\ a^2x + b^2y & = 1 \end{cases}$$

２００１線形代数 I 夜 期末試験問題・解答例

実施日：2001 年 8 月 3 日 (金) 6 限

[1] -84

[2] (1) 第２列の展開は

$$7(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -5 & 2 \end{vmatrix} + 4(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 3 & -3 \\ -5 & 2 \end{vmatrix} + (-7)(-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 3 & -3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -1.$$

一方，第３行の展開は

$$(-5)(-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 7 & -3 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} + (-7)(-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 3 & -3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} + 2(-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = -1.$$

よって等しい．

(2) それぞれの成分の余因子を計算して，与えられた行列 A に対する余因子行列 $\tilde{A}$ を求めると

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} -6 & 7 & -2 \\ 8 & -9 & 3 \\ 13 & -14 & 5 \end{pmatrix}$$

である．(1) から $|A| = -1$ であるから

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\tilde{A} = \begin{pmatrix} 6 & -7 & 2 \\ -8 & 9 & -3 \\ -13 & 14 & -5 \end{pmatrix}.$$

[3] クラメルの公式を適用すると

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -b \\ 1 & b^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & -b \\ a^2 & b^2 \end{vmatrix}} = \frac{b^2+b}{ab^2+a^2b} = \frac{b^2+b}{ab(a+b)}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} a & 1 \\ a^2 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & -b \\ a^2 & b^2 \end{vmatrix}} = \frac{a-a^2}{ab^2+a^2b} = \frac{a-a^2}{ab(a+b)}.$$

ここで a, b は $a = 1-\sqrt{2}$, $b = 1+\sqrt{2}$ であるので，

$$a+b = 2, \quad ab = -1.$$

また，$a^2 - 2a - 1 = 0$ より

$$a - a^2 = -a - 1 = -2 + \sqrt{2}.$$

また，$b^2 - 2b - 1 = 0$ より

$$b^2 + b = 3b + 1 = 4 + 3\sqrt{2}.$$

これらを代入すると

$$x = -\frac{4+3\sqrt{2}}{2}, \quad y = \frac{2-\sqrt{2}}{2}$$

を得る．

解答は結果だけでなく，それに至る過程を記述すること．結果のみの解答の場合，その問の得点は 0 点とする．

[1] 次の行列の積を計算せよ．

$$\begin{pmatrix} 6 & 6 & 3 \\ 5 & 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

[2] 次の行列の逆行列を求めよ．

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

[3] 次の連立方程式を解け．

$$\begin{cases} x - 5y + 15z &= 2 \\ x + 5y - 4z &= 3 \\ 4x + 9y + 5z &= 11 \end{cases}$$

[4] 次の行列の rank（階数）を求めよ．

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & 5 & 4 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

[5] a を実数とするとき，次の連立方程式を考える．

$$\begin{cases} 2x + 3y + 2z &= 4 \\ -x + y + 4z &= 1 \\ -x + 6y + 14z &= a \end{cases}$$

この方程式が解を持つための a の条件を求め，そのときの解を表示せよ．

[1]

$$\begin{pmatrix} 306 \\ 233 \end{pmatrix}$$

[2]

$$\begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

[3]

$$\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

[4] rank $A = 2$

[5] 拡大係数行列は基本変形され標準形を得る.

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 & 4 \\ -1 & 1 & 4 & 1 \\ -1 & 6 & 14 & a \end{pmatrix} \to\to \cdots \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 1/5 \\ 0 & 1 & 2 & 6/5 \\ 0 & 0 & 0 & a-7 \end{pmatrix}$$

これより解を持つための a の条件は $a = 7$. このとき，$z = t$ とおくと

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/5 \\ 6/5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

[**1**] つぎの行列式を計算せよ．

$$\begin{vmatrix} 4 & 6 & -4 & 2 \\ 3 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 0 & -5 \\ 0 & 3 & -2 & 1 \end{vmatrix}$$

[**2**] つぎの行列の逆行列を求めよ．ただし，基本変形による方法を用いてはいけない．

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

[**3**] つぎの行列が逆行列を持つための a, b, c の条件を求めよ．

$$\begin{pmatrix} 1 & a & bc \\ 1 & b & ca \\ 1 & c & ab \end{pmatrix}$$

[**4**] a, b は

$$a = \frac{-3+\sqrt{7}}{2}, \quad b = \frac{-3-\sqrt{7}}{2}$$

である．このとき，つぎの行列式を計算せよ．

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a \\ b & 1 & a \\ b & b & 1 \end{vmatrix}$$

[**1**] -96

[**2**]

$$A^{-1} = \frac{1}{18}\begin{pmatrix} -5 & 1 & 7 \\ 7 & -5 & 1 \\ 1 & 7 & -5 \end{pmatrix}$$

[**3**] a, b, c が相異なる.

[**4**] -2

解答は結果だけでなく，それに至る過程を記述すること．結果のみの解答の場合，その問の得点は 0 点とする．また，行列の基本変形を行う際には，どの変形を行ったかを明示すること．

[1] 次の行列の逆行列を求めよ．

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

[2] 行列の <u>基本変形を用いて</u> 次の連立方程式を解け．

(1)
$$\begin{cases} 2x - 9y &= 2 \\ 3x - 5y &= 6 \\ -x + 7y &= 0 \end{cases}$$

(2)
$$\begin{cases} x + y - 2z &= 9 \\ -2x + y + z &= -4 \\ 3x + 2y + 5z &= -7 \end{cases}$$

(3)
$$\begin{cases} 2x - 3y + 4z &= -2 \\ -x + 5y + 6z &= -7 \\ -5x + 11y - 2z &= -3 \end{cases}$$

[3] 次の行列の rank（階数）を求めよ．

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{pmatrix}$$

[4] 行列の積に関して，次の等式をみたす a を求めよ．

$$\begin{pmatrix} 5 & 4 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -4 & 10 \\ -7 & 4 & 12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 8$$

解答例：[1]

$$A^{-1} = \frac{1}{18}\begin{pmatrix} -5 & 7 & 1 \\ 1 & -5 & 7 \\ 7 & 1 & -5 \end{pmatrix}$$

[2] (1) 解なし.

(2)

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{15}\begin{pmatrix} 21 \\ 26 \\ -44 \end{pmatrix}$$

(3)

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} -38/7 \\ -16/7 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -31/7 \\ -16/7 \\ 0 \end{pmatrix}$$

[3] $\operatorname{rank} A = 2$

[4] $a = -5/3$

解答は結果だけでなく，それに至る過程を記述すること．結果のみの解答の場合，その問の得点は 0 点とする．

[1] 次の行列について以下の問いに答えよ．

$$A = \begin{pmatrix} -5 & -4 & 3 \\ 4 & 0 & -1 \\ 6 & -4 & 2 \end{pmatrix}$$

(1) 余因子をすべて求めよ．
(2) 逆行列を求めよ．

[2] 次の行列式を計算せよ．

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & 5 & 0 \\ 4 & 4 & -1 & 1 \\ -3 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

[3] 次の行列式を因数分解の形で求めよ．

$$\begin{vmatrix} 1 & p & p^2 \\ 1 & q & q^2 \\ 1 & r & r^2 \end{vmatrix}$$

[4] 3 次正方行列 A の行列式 $|A|$ の値は -1 である．このとき，A のすべての成分が整数ならばその逆行列 A^{-1} の成分もすべて整数であることを示せ．

[解答例]

[1] (1) $a_{11} = -4$, $a_{12} = -14$, $a_{13} = -16$, $a_{21} = -4$, $a_{22} = -28$, $a_{23} = -44$, $a_{31} = 4$, $a_{32} = 7$, $a_{33} = 16$

(2)

$$A^{-1} = \frac{1}{28}\begin{pmatrix} -4 & -4 & 4 \\ -14 & -28 & 7 \\ -16 & -44 & 16 \end{pmatrix}$$

[2] -286

[3] $(p-q)(q-r)(r-p)$

[4] 一般に

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\tilde{A}$$

であるから，$A^{-1} = -\tilde{A}$. A の成分がすべて整数ならばその余因子はすべて整数．よって余因子行列 $\tilde{A}$ の成分はすべて整数．よって A^{-1} についても同じことが成立.

解答は結果だけでなく，それに至る過程を記述すること．結果のみの解答の場合，その問の得点は 0 点とする．

[**1**]　３次正方行列 $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & x \end{pmatrix}$ について，ただし x は実数とする，

(1) $x = 1$ のとき，基本変形による方法で逆行列を求めよ．

(2) $x = 4$ のとき，余因子行列を構成する方法で逆行列を求めよ．

[**2**] 行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$ の値を求めよ．

[**3**]　連立方程式 $\begin{cases} x + 3y + 5z &= -6 \\ 2x + 6y + 7z &= 0 \\ 3x + 9y + 8z &= 10 \end{cases}$ を解け．

K.U.

[解答例] [1] (1) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ (2) $\dfrac{1}{10}\begin{pmatrix} 7 & -3 & -1 \\ -3 & 7 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$

[2] -20

[3] 拡大係数行列を作り

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -6 \\ 2 & 6 & 7 & 0 \\ 3 & 9 & 8 & 10 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -6 \\ 0 & 0 & -3 & 12 \\ 0 & 0 & -7 & 28 \end{pmatrix} \quad \text{2 行に 1 行の } (-2) \text{ 倍を足す}$$

行変形では $(2,2)$ 成分に軸を作ることができないので，2 列と 3 列を交換すると

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 & -6 \\ 0 & -3 & 0 & 12 \\ 0 & -7 & 0 & 28 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 14 \\ 0 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{標準形}$$

列交換を行ったので，$y = t$ とおき，

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 14 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

ただし，t は実数を動き，解は無数に現れる．

K.U.

解答は結果だけでなく，それに至る過程を記述すること．結果のみの解答の場合，その問の得点は 0 点とする．

[**1**] 次の行列式を求めよ．$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 5 & 7 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \end{vmatrix}$

[**2**] ３次正方行列 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ の逆行列を求めよ．

[**3**] 連立方程式 $\begin{cases} -x + 2y + 3z & = 2 \\ 2x - 5y + 6z & = 7 \\ -2x + 3y + 18z & = 15 \end{cases}$ を解け．

解答は結果だけでなく，それに至る過程を記述すること．結果のみの解答の場合，その問の得点は 0 点とする．検算が可能な場合には必ず検算を行うこと（これは自分のためです）．

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ x & y \end{pmatrix}$ について，$AB = BA$ をみたすように x, y を定めよ．

2. 行列 $\begin{pmatrix} -1 & -3 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ の逆行列を <u>はきだし法</u> により求めよ．

3. 連立方程式 $\begin{cases} 2x + 2y + 6z & = 2 \\ -x + 3y & = 1 \\ -7x + 5y - 12z & = -1 \end{cases}$ を解け．

4. 行列式 $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \\ 5 & -2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 6 \end{vmatrix}$ の値を求めよ．

5. 行列 $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 4 & -2 & 3 \end{pmatrix}$ の逆行列を <u>余因子行列を構成する方法</u> で求めよ．

6. 正方行列 A の成分はすべて整数 $(0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$ であるとする．もし，A の行列式が -1 ならば A の逆行列の成分もすべて整数であることを示せ．

K.U.

[解答例] 1.　$x = y = 1/2$

2. $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -4/3 & -1 & -2/3 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

3. $t \begin{pmatrix} -9/4 \\ -3/4 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 0 \end{pmatrix}$

4. -4

5. $\dfrac{1}{3} \begin{pmatrix} 5 & 4 & -3 \\ 4 & 5 & -3 \\ -4 & -2 & 3 \end{pmatrix}$

6.　余因子の定義から A の成分がすべて整数ならばその余因子もすべて整数である．$A^{-1} = \dfrac{1}{|A|}\tilde{A}$, $\tilde{A}$ は余因子行列，から $|A| = -1$ ならば $A^{-1} = -\tilde{A}$. ゆえに A^{-1} の成分もすべて整数である．

KU

解答は結果だけでなく，それに至る過程を記述すること．結果のみの解答の場合，その問の得点は 0 点とする．検算が可能な場合には必ず検算を行うこと（これは自分のためです）．

1. 次の行列式の値を求めよ．

$$\begin{vmatrix} 4 & -4 & 4 & -4 \\ -5 & 5 & -5 & 5 \\ -2 & -2 & -2 & -2 \\ 3 & 3 & -3 & -3 \end{vmatrix}$$

2. はき出し法により，次の行列の逆行列を求めよ．

$$\begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & -3 \\ -3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

K.U.

[解答例] 1. 行列式の値は 0.

2. 逆行列は $\dfrac{1}{5}\begin{pmatrix} 2 & -4 & -7 \\ 3 & -1 & -3 \\ 3 & -6 & -8 \end{pmatrix}$