線形代数 II (夜) 期末試験問題

1998/2/6(金)

[1] $\boldsymbol{R}^3$ のベクトル列

$$\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

が一次独立か一次従属かを判定せよ. この結果から 3 つのベクトルの (厳密な長さ, 向きを与えるのではなく) 位置関係をわかりやすく図示せよ.

[2] 2×3 行列

$$A = \begin{pmatrix} -3 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

に対して線形写像 f_A を

$$f_A(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}, \quad \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^3$$

で定義するとき, f_A の像 $\mathrm{Im}\, f_A$ の基底と核 $\mathrm{Ker}\, f_A$ の基底を求めよ. さらにこの結果から $\mathrm{Im}\, f_A$ と $\mathrm{Ker}\, f_A$ はどのような世界であるかを自分なりに (もちろん数学的見地から) 論じよ.

[3] ２つのベクトル

$$\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 9 \\ 11 \end{pmatrix}$$

を基底にもつ部分空間の正規直交基底を求めよ. さらに求めた２つのベクトルが実際に直交していることを示せ.

[4] ２次正方行列

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

について次の問に答えよ.

(1) 行列 A の固有値, 固有空間を求めよ.

(2) A が対角化可能 (すなわち, ある正則行列 P があって $P^{-1}AP$ が対角行列とできる) か否かを述べよ. もし対角化可能ならば P^{-1} と $P^{-1}AP$ を求めよ.

(3) (1) で求めた固有値は行列 A のどのような性質を表す量であるかを論じよ.

線形代数 II 中間試験問題

平成 10 年 11 月 27 日 (金)

[1] 次の 4 次元数ベクトル列は一次独立であるか一次従属であるかを判定せよ。

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

[2] 3 次元数ベクトル空間 $\boldsymbol{R}^3$ の 部分空間 V_1, V_2 を次のベクトルで生成される部分空間とする。

$$V_1 = V\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

$$V_2 = V\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$$

(1) V_1 の基底を求め、次元 $\dim V_1$ を求めよ。
(2) 和空間 $V_1 + V_2$ の基底を求め、$\dim(V_1 + V_2)$ を求めよ。

[3] $\boldsymbol{R}^4$ から $\boldsymbol{R}^3$ への線形写像 f を

$$f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & -3 \\ 2 & 1 & -1 & -5 \\ 2 & 3 & -7 & -7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \boldsymbol{R}^4$$

で定義する。
(1) f の像 $\mathrm{Im} f$ の定義を述べよ。
(2) $\mathrm{Im} f$ の次元を求めよ。

線形代数 II 期末試験問題

1999 年 2 月 12 日 (金)

[1] a, b を実数とする。2 次元列ベクトル

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ a \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} b \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

について、$\boldsymbol{x}$ は長さが $\sqrt{2}$, $\boldsymbol{y}$ は長さが 3, そして $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ は角度 $\frac{\pi}{4}$ で交わっている。このとき a, b を求めよ。

[2] 3 次正方行列

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

の固有空間をすべて求め、それぞれの正規直交基底 (ONB) を求めよ。

[3] 3 次正方行列

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 1 & 4 & -1 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

は対角化可能であるならば $P^{-1}AP$ が対角行列となる正則行列 P と $P^{-1}AP$ を求めよ。対角化可能でないならば対角化可能でないと記せ。

線形代数 II 中間試験問題　1999.12.3(金)

[1] ベクトル列

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix},$$

が一次独立であるか一次従属であるかを判定せよ。

[2] a を実数とする。f を次で定義される $\boldsymbol{R}^3$ から $\boldsymbol{R}^3$ への線形写像とする。

$$f(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 7 \\ -1 & 0 & a \\ 2 & 4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$\dim \mathrm{Ker} f = 1$ となる a の値を求め、そのときの $\mathrm{Ker} f$ の基底を求めよ。

[3] 4 つのベクトル列から生成される部分空間

$$V\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ -9 \\ 12 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 10 \\ -20 \end{pmatrix}\right)$$

の基底と次元を求めよ。

[4] 次の連立方程式を考える。

$$\begin{cases} x - y - z & = b_1 \\ -2x + 6y + 18z & = b_2 \\ x + 2y + 11z & = b_3 \end{cases}$$

この方程式が解を持つ、そのようなデータ

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

を 4 つ挙げよ。

線形代数 II 期末試験問題　2000.2.18(金)

[1] $\boldsymbol{R}^3$ のベクトル

$$\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} a \\ 1 \\ b \end{pmatrix}$$

は直交していて, $\boldsymbol{a}_2$ の大きさ (長さ) は $\sqrt{3}$ である。a, b を求めよ。ただし, $a > 0$ とする。

[2] $\boldsymbol{R}^3$ の部分空間

$$V\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

の正規直交基底 (ONB) を求めよ。

[3] 行列

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$

の固有値, 固有ベクトルを求めよ。

[4] 行列

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

を正則行列 P で対角化せよ。

２０００線形代数 II 中間試験問題

2000 年 12 月 1 日 (金) 実施

(注意)
(i) 解答は結果だけでなく，それに至る過程を記述すること．結果のみの解答の場合，その問の得点は 0 点とする．
(ii) 解答例については試験終了後，`http://inside.maebashi-it.ac.jp/~ken/2000test.htm` を参照のこと．

1. (配点 15 点)　ベクトル列

$$\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{a}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

について次の問に答えよ．
(1) (5 点) $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ は一次独立か一次従属かを判定せよ．
(2) (10 点) 生成された部分空間 $V(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3)$ の正規直交基底を求めよ．

2. (配点 5 点)　$\boldsymbol{R}^2$ において，ベクトル $\boldsymbol{x}$ を y 軸に対称なベクトルに写して，続けて長さ（大きさ）を 1/2 にする，そのような写像 f の表現行列を求めよ．f の表現行列とは

$$f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$$

をみたす行列 A のことをいう．

3. (配点 10 点)　α, β を実数とする．３次正方行列

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 3 & 1 & \alpha \\ 2 & 1 & \beta \end{pmatrix}$$

について，線形写像 f を $f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ で定義する．次の問に答えよ．
(1) (5 点) $\alpha = \beta = 1$ のとき，像 $\mathrm{Im} f$ を求めよ．
(2) (5 点) 連立方程式

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \quad \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

がただ一つの解をもつための α, β の条件を (α, β) 平面に図示せよ．

２０００線形代数 II 中間試験問題・解答例

2000 年 12 月 1 日 (金) 実施

1. (1) 行列

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 5 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to\to\cdots\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

であるから一次従属.

(2) まず，基底は

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

であり，シュミットの直交化法から正規直交基底は

$$\frac{1}{\sqrt{30}}\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

2.

$$A = \begin{pmatrix} -1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

3. (1)

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to\to\cdots\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

であるので

$$\mathrm{Im} f = V(\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix})$$

(2) 解空間の広さの問題であるから $\mathrm{Ker} f$ を調べて，$\mathrm{Ker} f = \{\mathbf{0}\}$ であることを示せばよい．つまり $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ がただ一つ解 $(\mathbf{0})$ をもつことを言えばよい.

$$A \to\to\cdots\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & \beta-1 \\ 0 & 1 & 2-\beta \\ 0 & 0 & \alpha-2\beta+1 \end{pmatrix}$$

から $\alpha - 2\beta + 1 \neq 0$ であればよい．つまり，基本変形が続けられて標準形は E_3 になる.

２０００線形代数 II 夜 期末試験問題

2001 年 2 月 2 日 (金) 実施

1. 次の行列の固有値と固有空間を求めよ．

(1)
$$\begin{pmatrix} -7 & -6 \\ 18 & 14 \end{pmatrix}$$

(2)
$$\begin{pmatrix} -1 & 3 & -3 \\ 2 & 5 & -8 \\ 2 & 3 & -6 \end{pmatrix}$$

2. ２次正方行列
$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$
から決まる線形写像
$$f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}, \quad \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^2$$
について，勝手なベクトル $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^2$ を描き，$f(\boldsymbol{x})$ を図示せよ．

3. 行列
$$A = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}$$
を対角化せよ．すなわち，$P^{-1}AP$ が対角行列となる P を求め，さらに $P^{-1}AP$ を求めよ．

4. ベクトル
$$\boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} a \\ a+b \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix},$$
について，$\boldsymbol{x}_1$ は長さが 1 で $\boldsymbol{x}_1$ と $\boldsymbol{x}_2$ は直交している．a, b を求めよ．

２０００線形代数 II 夜 期末試験問題・解答例

2001 年 2 月 2 日 (金) 実施

1. (1)

$$V_2 = V(\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}), \quad V_5 = V(\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}).$$

(2)

$$V_{-3} = V(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}), \quad V_{-1} = V(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}), \quad V_2 = V(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}).$$

2. 固有空間

$$V_1 = V(\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}), \quad V_5 = V(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}).$$

に従って作図する。

3.

$$P = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}.$$

4.

$$a = \pm\frac{1}{\sqrt{5}}, \quad b = \mp\frac{3}{\sqrt{5}} \quad \text{（複号同順）}$$

[1] $\mathbf{R}^2$ のベクトル

$$\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

について次の問に答えよ.

(1) ベクトル列 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ が一次独立となるような $\mathbf{a}_2$ を（理由を述べた上で）一つ求めよ.

(2) ベクトル

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 18 \\ -4 \end{pmatrix}$$

を $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ の一次結合で表せ.

[2] 次の部分空間の基底と次元を求めよ.

$$V_1 = V(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix})$$

[3] $\mathbf{R}^3$ の部分空間

$$V_1 = V(\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}), \quad V_2 = V(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix})$$

について次の問に答えよ.

(1) 積空間 $V_1 \cap V_2$ を求めよ.

(2) 和空間 $V_1 + V_2$ の次元を求めよ.

[4] 線形写像 $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ を次で定める：ベクトル $\mathbf{x}$ を原点中心に反時計 周りに $\frac{\pi}{2}$ 回転させた後，x 軸に関して対称な位置に写す，そのような写像を f とする.

(1) f の表現行列を求めよ.

(2) f は単射（一対一）であることを示せ.

(3) f の像 $\mathrm{Im}\, f$ の次元を求めよ.

[1] (1) 例えば

$$\mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

は基本変形により

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \to \cdots \to \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

となるので $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ 一次独立を満たす.

(2)

$$c_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 \\ -4 \end{pmatrix}$$

とおくとき

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 18 \\ 3 & 0 & -4 \end{pmatrix} \to \cdots \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4/3 \\ 0 & 1 & 50/3 \end{pmatrix}$$

であるので

$$\begin{pmatrix} 18 \\ -4 \end{pmatrix} = -\frac{4}{3} \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} + \frac{50}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

[2] このベクトル列を１，２，３列とする行列の基本変形による標準形からその rank は 2 になる，が２列と３列を入れ替えるので基底は

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

である.

[3] (1)

$$x \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} = u \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + v \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

とおく.

$$\begin{pmatrix} -3 & -2 & -1 & -2 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

だから列交換なしで

$$\begin{pmatrix} -3 & -2 & -1 & -2 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & -2 & -1 \end{pmatrix} \to \cdots \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

これより $v = -u$ を得る．ゆえに

$$u \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + v \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = u \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

から

$$V_1 \cap V_2 = V(\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}).$$

(2)

$$\dim(V_1 + V_2) = \dim V_1 + \dim V_2 - \dim(V_1 \cap V_2) = 2 + 2 - 1 = 3.$$

[4] (1)

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

であるので

$$f(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

(2), (3) 基本変形により

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \to \cdots \to \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

よって単射であり，$\dim \mathrm{Im} f = 2$ である．

[1] a, b を実数として，さらに $b > 0$ とする．$\mathbf{R}^2$ のベクトル

$$\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} a \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ b \end{pmatrix}$$

は互いに直交して，$\mathbf{x}_1$ の長さは $\sqrt{3}$ である．a, b を求めよ．

[2] $\mathbf{R}^3$ のベクトル

$$\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

のなす角 θ に対して $\cos\theta$ の値を求め，$\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ の大体の位置関係を図示せよ．

[3] シュミットの直交化法を用いて次の部分空間 V_1 の正規直交基底を求めよ．

$$V_1 = V(\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix})$$

[4] ２次正方行列

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

について次の問に答えよ．

(1) A の固有値を求め，対応する固有ベクトル，固有空間を求めよ．

(2) $f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ で定まる線形写像について，勝手な $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^2$ に対して $f(\mathbf{x})$ を図示せよ．

[5] ３次正方行列

$$A = \begin{pmatrix} -4 & -10 & -8 \\ 5 & 8 & 5 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

の固有値を求め，対応する固有空間を求めよ．

[1] $\mathbf{x}_1$ の長さが $\sqrt{3}$ より $\sqrt{a^2+1}=\sqrt{3}$, すなわち $a^2+1=3$. ゆえに $a=\pm\sqrt{2}$. 直交条件から内積 $(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2)=2a-b=0$. ゆえに $b=2a$. 最後に $b>0$ であるから，これを満たすのは $a=\sqrt{2}$ のとき. よって $a=\sqrt{2}$, $b=2\sqrt{2}$.

[2]

$$\cos\theta=\frac{(\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2)}{|\mathbf{a}_1||\mathbf{a}_2|}.$$

ここで $(\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2)=-14$. $|\mathbf{a}_1|=\sqrt{10}$, $|\mathbf{a}_2|=\sqrt{30}$. よって $\cos\theta=-14/(10\sqrt{3})=-7/(5\sqrt{3})$. $\cos\theta<0$ であることから $\mathbf{a}_1$ と $\mathbf{a}_2$ のなす角は鈍角である（そのように作図すればよい）.

[3]

$$\mathbf{a}_1=\begin{pmatrix}-1\\3\\0\end{pmatrix},\quad \mathbf{a}_2=\begin{pmatrix}-2\\-4\\1\end{pmatrix}$$

とおく. $\mathbf{b}_1=\mathbf{a}_1$ として $\mathbf{b}_1$ を正規化すると

$$\mathbf{b}_1'=\frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix}-1\\3\\0\end{pmatrix}.$$

次に

$$\mathbf{b}_2=\mathbf{a}_2-(\mathbf{a}_2,\mathbf{b}_1')\mathbf{b}_1'.$$

$$(\mathbf{a}_2,\mathbf{b}_1')=-\frac{10}{\sqrt{10}}=-\sqrt{10}$$

よって

$$\mathbf{b}_2=\begin{pmatrix}-2\\-4\\1\end{pmatrix}+\sqrt{10}\frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix}-1\\3\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\\-1\\1\end{pmatrix}.$$

$\mathbf{b}_2$ を正規化すると

$$\mathbf{b}_2'=\frac{1}{\sqrt{11}}\begin{pmatrix}-3\\-1\\1\end{pmatrix}.$$

$\mathbf{b}_1'$, $\mathbf{b}_2'$ が求める正規直交基底である.

[4] (1) 固有方程式

$$\varphi_A(\lambda)=\begin{vmatrix}\lambda-3 & -1\\ -2 & \lambda-2\end{vmatrix}=\lambda^2-5\lambda+4=(\lambda-1)(\lambda-4)=0.$$

よって固有値は 1 と 4. 固有値 1 のとき固有ベクトルは方程式

$$\begin{pmatrix}-2 & -1\\ -2 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\mathbf{0}.$$

よって $y=-2x$. これより

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=t\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix},\quad t\neq 0\quad \text{固有ベクトル}$$

$$V_1=V(\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix})\quad \text{固有空間}$$

次に固有値 4 のとき固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \mathbf{0}.$$

をみたす．よって $y = x$. これより

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t \neq 0 \quad \text{固有ベクトル}$$

$$V_4 = V(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}) \quad \text{固有空間}$$

(2) 略

[5] 固有方程式

$$\varphi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda+4 & 10 & 8 \\ -5 & \lambda-8 & -5 \\ 3 & 0 & \lambda-1 \end{vmatrix} = \lambda^3 - 5\lambda^2 - 2\lambda + 24 = (\lambda+2)(\lambda-3)(\lambda-4) = 0.$$

固有値は $-2, 3, 4$. 固有空間は

$$V_{-2} = V(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}), \ V_3 = V(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}), \ V_4 = V(\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}).$$

[1] 次のベクトル列について一次独立か一次従属かを判定せよ.

$$\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \ \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}, \ \mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

[2] 次の部分空間の基底と次元を求めよ.

$$V_1 = V(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix})$$

[3] 二つの部分空間

$$V_1 = V(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}), \quad V_2 = V(\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix})$$

に対して，積空間 $V_1 \cap V_2$ の基底と和空間 $V_1 + V_2$ の次元を求めよ.

[4] (1) 次の線形写像は単射であるか否かを判定せよ.

$$f(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 6 \\ -1 & 1 & 7 \\ 0 & 4 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x}$$

(2) 次の線形写像は全射であるか否かを判定せよ.

$$g(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 0 & -6 \\ 3 & -6 & 1 & 7 \\ 1 & -2 & 5 & -7 \end{pmatrix} \mathbf{x}$$

[1] 行列

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & -3 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

を基本変形すると標準形は単位行列になる．よって一次独立である．

[2] 行列

$$\begin{pmatrix} 1 & 6 & 4 \\ 2 & 5 & 1 \\ 3 & 4 & -2 \end{pmatrix}$$

を基本変形すると，列交換無しで rank 2 の標準形になる．よって

$$V_1 = V(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix})$$

であり，$\dim V_1 = 2$.

[3] $\mathbf{a} \in V_1 \cap V_2$ とすると，適当な実数 x, y, u, v があって

$$\mathbf{a} = x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} = u\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + v\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

つまり

$$x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} = u\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + v\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

をみたす．行列

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & -3 & -1 & -5 \end{pmatrix}$$

を基本変形すると，列交換無しで rank 2 の標準形になる．このことから，u, v は独立したパラメータとして取れることを意味する（互いに依存しない）．よって $\dim(V_1 \cap V_2) = 2$ で，実際には V_1 と V_2 は同一の部分空間であるといえる．最後に次元定理から $\dim(V_1 + V_2) = \dim V_1 + \dim V_2 - \dim(V_1 \cap V_2) = 2$ を得る．

[4] (1) 単射である．

(2) 全射でない．

[1] 次の部分空間 V_1 の正規直交基底を求めよ.

$$V_1 = V(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix})$$

[2] ２次正方行列

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

の固有多項式と固有値を求めよ.

[3] ３次正方行列

$$B = \begin{pmatrix} -4 & -10 & -8 \\ 5 & 8 & 5 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

の固有値とそれに対する固有空間を求めよ.

[4] ２次正方行列

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

について次の問に答えよ.

(1) A は固有値を２つ持つことを，実際に計算により確かめよ.

(2) それぞれの固有値に対する固有空間の基底は直交することを示せ.

(3) ベクトル $\boldsymbol{x}$ を勝手に与えて，$f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ を作図せよ.

[1] シュミットの直交化法により

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

が V_1 の正規直交基底.

[2] 固有多項式 $\varphi_A(\lambda) = (\lambda - 3)^2$, 固有値 3.

[3] 固有多項式 $\varphi_B(\lambda) = (\lambda + 2)(\lambda - 3)(\lambda - 4)$ から固有値 $-2, 3, 4$. それぞれの固有空間は

$$V_{-2} = V(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}),\ V_3 = V(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}),\ V_4 = V(\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}).$$

[4] ２次正方行列

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

について次の問に答えよ.

(1) 固有方程式 $\varphi_A(\lambda) = (\lambda + 2)(\lambda - 3) = 0$ から固有値 $-2, 3$ の２個.

(2) それぞれの固有値に対する固有空間は

$$V_{-2} = V(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}),\ V_3 = V(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix})$$

であるから，それぞれの基底の内積は 0 である．よって直交する.

(3) 略.

解答は結果だけでなく，それに至る過程を記述すること．結果のみの解答の場合，その問の得点は 0 点とする．

[1] 次のベクトル列は一次独立であるか，一次従属であるか，判定せよ．

$$\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

[2] a は実数とする．生成される部分空間について，

$$\dim V(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ a \end{pmatrix}) = 2$$

であるとき，a を求めよ．

[3] 線形写像 $f\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ は次で与えられる：

「f は $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^2$ を $\frac{\pi}{3}$-回転させ，続けて，y 軸に関して対称に写す」

(a) f の表現行列を求めよ．ただし，θ-回転を表す行列は証明無しで与えてよい．

(b) f は単射であるか．

[4] 二つのベクトル

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} b \\ -4 \end{pmatrix}$$

は直交している．b を求めよ．さらに，求めた b について，$\mathbf{y}$ を正規化せよ．

[5] 生成される部分空間

$$V_1 = V(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix})$$

の正規直交基底を求めよ．

[6] 行列

$$B = \begin{pmatrix} -3 & 4 & 2 \\ -4 & 5 & 2 \\ 4 & -4 & -1 \end{pmatrix}$$

は対角化可能であるか．可能ならば正則行列 P を与えて，$P^{-1}AP$ が対角行列となるようにせよ．

[7] 行列

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$$

について，

(a) 固有値，固有空間を求めよ．

(b) 勝手に $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^2$ を与えて，$A\mathbf{x}$ を作図せよ．

(c) A^n を求めよ．ただし，$n = 1, 2, 3, \cdots$

[解答例] [1] 一次独立．実際，基本変形により

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 1 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & 3 \end{pmatrix} \to\to \cdots \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

が導ける．

[2] $a = 8$

[3] (a) 線形写像の合成は表現行列の積で表せる．

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 & \sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

(b) 基本変形により

$$\begin{pmatrix} -1/2 & \sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix} \to\to \cdots \to \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ゆえに単射.

[4] (a) 直交条件 $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$ (内積が 0) から $b = -3$.

(b)

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \end{pmatrix}$$

を正規化すると

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} -3/5 \\ 4/5 \end{pmatrix}$$

[5] 例えば

$$\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

とおいて，シュミットの直交化法を用いると

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \frac{1}{\sqrt{54}} \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

は V_1 の正規直交基底.

[6] 固有方程式は $(\lambda - 1)^2(\lambda + 1) = 0$. よって固有値は ± 1. 1 の固有空間は

$$V_1 = V(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix})$$

-1 の固有空間は

$$V_{-1} = V(\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix})$$

これより，$\dim V_1 + V_{-1} = 3$ であるので対角化可能．P として

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

とおくと P は正則で

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{対角行列}$$

[7] (a) 固有値は $2, 5$. それぞれの固有空間は

$$V_2 = V(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}), \quad V_5 = V(\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix})$$

(b) 作図可能．作図は略.

(c) P として

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

とおくと，P は正則で

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{対角行列}$$

ゆえに

$$A = P \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} P^{-1}$$

実際

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 2/3 & 1/3 \\ -1/3 & 1/3 \end{pmatrix}$$

であるので

$$\begin{aligned} A^n &= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 5^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2/3 & 1/3 \\ -1/3 & 1/3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (2/3)2^n + (1/3)5^n & (1/3)2^n - (1/3)5^n \\ (2/3)2^n - (2/3)5^n & (1/3)2^n + (2/3)5^n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

KU

- 試験時間は６０分とする．
- 解答は結果だけでなく，それに至る過程を記述すること．
- <u>１題以上</u> 正答の場合，合格とする．この条件に達しない場合は不合格とする．部分点は考慮しない．

[1] 次の行列が対角化可能ならば対角化せよ．

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

[2] ２次正方行列

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

から定まる線形写像 $f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ について，$\mathbb{R}^2$ 上に $\mathbf{x}$ を勝手に与えて $f(\mathbf{x})$ を作図せよ．

[3] 生成される部分空間

$$V_1 = V(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix})$$

の基底を求め，さらに，正規直交基底にとり直せ．

解答は解答用紙に記入し，結果だけでなくそれに至る過程を記述すること．結果のみの解答の場合，その問の得点は 0 点とする．

[1] $V_1 = V(\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix})$ の正規直交基底を求めよ．

[2] ２次正方行列 $A = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ について次の問に答えよ．

(1) 固有値，固有ベクトル，固有空間を求めよ．

(2) $\mathbf{x}$ を勝手に与えて，$f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ を作図せよ．

(3) (2) で定めた線形写像 f は単射であるか，答えよ．

[3] 次のベクトル列が一次従属になるように a の値を定めよ． $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ a \end{pmatrix}$.

[4] ２次元ベクトル列 $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ \beta \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} \alpha \\ -3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ は次の３条件をみたしているとき α, β を求めよ．

(i) $\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}$ は直交している，

(ii) $\mathbf{a}$ の大きさ $|\mathbf{a}|$ について $|\mathbf{a}| = 2$,

(iii) $\mathbf{b}$ と $\mathbf{c}$ のなす角 θ は $0 < \theta < \frac{\theta}{2}$ をみたす．

[5] $A = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$ について A^n $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ を求め，さらに A の安定性について論じよ．

K.U.

[解答例] [1] シュミットの直交化法により，$\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\frac{1}{\sqrt{41}}\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix}$ が求める正規直交基底.

[2] (1) 固有値 $-3, 7$. -3 の固有ベクトルは $t\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, 7 の固有ベクトルは $t\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $t \neq 0$. 固有空間 $V_{-3} = V(\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix})$, $V_7 = V(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix})$.

(2) 略　(3) A を基本変形すると単位行列になるので単射.

[3] 条件から，行列 $\begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 1 & 3 & 5 \\ 4 & 1 & a \end{pmatrix}$ が基本変形により単位行列**ではない**標準形になる．よって $a = -13$.

[4] (i) は $-\alpha - 3\beta = 0$, (ii) は $\beta = \pm\sqrt{3}$, (iii) は $(\mathbf{b}, \mathbf{c}) = \alpha > 0$ ということ．以上から $\alpha = 3\sqrt{3}$, $\beta = -\sqrt{3}$.

[5]

$$A^n = \begin{pmatrix} \frac{4^n+6^n}{2} & \frac{4^n-6^n}{2} \\ \frac{4^n-6^n}{2} & \frac{4^n+6^n}{2} \end{pmatrix}$$

A の固有値は共に 1 より大きいので不安定.

K.U.

- 試験時間は 60 分とする．
- 解答は解答用紙に記入し，結果だけでなくそれに至る過程を記述すること．結果のみの解答の場合，その問の得点は 0 点とする．

1. 次の行列を対角化せよ．$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$

2. 次の生成される部分空間の基底と次元を求めよ．$V(\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -11 \\ 6 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix})$

3. ２次元ベクトル列 $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ は次の３条件をみたしている．α, β を求めよ．
(i) $\mathbf{a}$ の大きさは $|\mathbf{a}| = \sqrt{5}$.
(ii) $\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}$ は直交している．
(iii) $\mathbf{a}$ と $\mathbf{c}$ のなす角 θ は $0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ をみたす．

K.U.