次の各問に答えよ．ただし，解答は結果だけでなく，それに至る過程を記述すること．結果のみの解答の場合，その問の得点は 0 点とする．

[1] $\dfrac{x^2+x-1}{x^2-2x-3}$ を部分分数に分解せよ．

[2] 極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n^2+3n+1}$ を求めよ．

[3] $\cos\dfrac{5}{12}\pi$ を求めよ．

[4] $\log_{\frac{1}{\sqrt{3}}} 81$ を求めよ．

[5] $\cos^{-1}\dfrac{4}{5}=\tan^{-1}x$ を解け．

[6] $x\sqrt[3]{25}=\sqrt[4]{125}$ を解け．

[7] $\sin(\alpha\pm\beta)$ の加法定理から 3 倍角の公式 $\sin 3\alpha$ を作れ．

[8] $1+2+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$ を数学的帰納法で示せ．

[9] 逆三角関数 $y=\cos^{-1}x$ の定義を述べよ．ただし，次の語句を含めること．単調減少，逆関数．

[10] $h>0, n=1,2,\ldots$ とする．$(1+h)^n$ を二項定理を用いて展開して，$(1+h)^n\geq 1+nh$ を導け．

(注意) **解答は結果だけでなく，それに至る過程も記述せよ．結果のみの記述の場合は零点になる．**

[1] 関数 $y = \dfrac{3x-6}{x-3}$ のグラフを書け.

[2] $\dfrac{1}{x^2(x-2)}$ を部分分数に分解せよ.

[3] $2^x = \dfrac{1}{\sqrt[3]{64}}$ を解け.

[4] $y = x^2 + 1$ $(x \geqq 0)$ の逆関数を求め，グラフにせよ.

[5] $\log_{10} 2 = 0.3$, $\log_{10} 3 = 0.48$ とする．6^{121} のケタ数を求めよ.

[6] $\sin\theta = \dfrac{1}{7}$ のとき，$\tan\theta$ を求めよ.

[7] $\cos\dfrac{\pi}{12}$ の値を求めよ.

[8] $\tan^{-1}\sqrt{2} = \cos^{-1} x$ を解け.

[9] $y = \cos^{-1} x$ のグラフを書け.

[10] $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ であるが，$1\cdot 3 + 3\cdot 5 + 5\cdot 7 + \cdots + (2n-1)\cdot(2n+1)$ を求めよ.

[11] $b > 0$ である．$(1+b)^n \geqq 1 + nb$ $(n = 1, 2, \cdots)$ を数学的帰納法で示せ.

[12] 二項定理を書け.

K.U.

(注意) 解答は結果だけでなく，それに至る過程も記述せよ．結果のみの記述の場合は零点になる．

[1] 次の値を求めよ．$\cos^{-1}(\cos\frac{4\pi}{3})$　ただし，$\cos^{-1}(\cdot)$ はアークコサインを表す．

[2] 対数法則 $\log_a x + \log_a y = \log_a xy$ を指数法則から導け．

[3] $\dfrac{1}{(x^2+1)(x-3)}$ を部分分数分解せよ．

[4] $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ を数学的帰納法で証明せよ．

解答

[1] $\cos^{-1}\left(\cos\frac{4}{3}\pi\right) = \cos^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{2}{3}\pi$

[2] $A = \log_a x$, $B = \log_a y$ とおくと,

$x = a^A$, $y = a^B$.

$xy = a^A \cdot a^B = a^{A+B}$ $\therefore$ $A+B = \log_a xy$ //

[3] $$\frac{1}{(x^2+1)(x-3)} = \frac{-\frac{x}{10}-\frac{3}{10}}{x^2+1} + \frac{\frac{1}{10}}{x-3}.$$

[4] $n=1$ のとき 左辺 $= 1$, 右辺 $= 1$. O.K.

$n=k$ で成立と仮定すると, $n=k+1$ では.

$$1^2+2^2+\cdots+k^2+(k+1)^2$$

$$= \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2$$

$$= \frac{(k+1)\{k(2k+1)+6(k+1)\}}{6}$$

$$= \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$$: $n=k+1$ のとき も正しい //