ベクトル解析 中間試験問題

1998/6/3(水)

[1] ベクトル $\boldsymbol{A} = (-1,\, 2,\, -3)$, $\boldsymbol{B} = (4,\, 5,\, -1)$ について次の問に答えよ。

(1) $\boldsymbol{A}$ の方向余弦を求めよ。ただし、$\boldsymbol{A}$ と同じ向きの大きさ 1 のベクトルを $\boldsymbol{A}$ の方向余弦という。

(2) 内積 $(2\boldsymbol{A}) \cdot (\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B})$ を求めよ。

(3) 外積 $(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}) \times (2\boldsymbol{B})$ を求めよ。

[2] スカラー場 $\varphi = x^2 y + z \sin x$ に対して次の問に答えよ。

(1) 勾配 $\nabla\varphi$ を求めよ。

(2) 点 $P(0,\, 2,\, 4)$ における $\nabla\varphi$ を求めよ。

(3) $\boldsymbol{u} = (-1,\, \sqrt{2},\, 1)$ 方向の点 P における方向微分係数を求めよ。

(4) このスカラー場 φ を温度分布としたとき、点 P において $\boldsymbol{u}$ 方向に温度は上がっていると考えられるか、それとも下がっていると考えられるかを答えよ。

[3] 位置ベクトル $\boldsymbol{r} = (x,\, y,\, z)$ に対して、$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ とおくとき、発散

$$\nabla \cdot \left(\frac{\boldsymbol{r}}{r^2} \right)$$

を計算せよ。

[4] ベクトル場 $\boldsymbol{A} = (y \log z,\, z e^{2x},\, x y^2)$ に対して、回転 $\nabla \times \boldsymbol{A}$ を求めよ。

[5] ある航空機の飛行位置が時刻を t としたときベクトル値関数

$$\boldsymbol{r}(t) = (e^{-t},\, -2t + \frac{1}{t},\, \log t)$$

で与えられている。次の問に答えよ。

(1) 時刻 $t = 1$ のとき、航空機の位置を座標で表せ。

(2) この航空機は時刻が十分経った時 $(t \to \infty)$、等速運動に近づくことを示せ。また、近づく速度をベクトルで与えよ。

(3) (2) の結果から航空機は時間が十分に経つとどの方向に飛んでいるかを答えよ。ただし、x 軸の正の向きを東とし、y 軸の正の向きを北とする。

ベクトル解析　期末試験問題

平成 10 年 9 月 16 日 (水)

[1] ベクトル場 $\boldsymbol{A} = (2z,\ -3x,\ y)$ の次の曲線 C に沿っての線積分を求めよ。

(1) C は原点から $P(1,2,3)$ に至る線分

(2) C は原点, $Q(0,0,3)$, $R(1,0,3)$, $P(1,2,3)$ を順次結ぶ折れ線

(3) C は位置ベクトル $\boldsymbol{r} = (t^3, 2t^2, 3t)$ $(0 \leqq t \leqq 1)$ で与えられる曲線

[2] ベクトル場 $\boldsymbol{A} = (-1,\ x,\ -z)$ の平面 $S\colon x + 2y + z = 2,\ x \geqq 0,\ y \geqq 0,\ z \geqq 0$ に沿っての面積分を求めよ。

[3] ベクトル場 $\boldsymbol{A} = (-xy,\ y,\ -z^2)$ とし、S は原点, $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(0,0,1)$, $(1,1,0)$, $(1,0,1)$, $(0,1,1)$, $(1,1,1)$ を頂点とする立方体の表面とする。発散定理を使って面積分

$$\int_S \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{n}\, dS$$

を求めよ。ただし、S の法単位ベクトル $\boldsymbol{n}$ は立方体の外側に向けてとるものとする。このベクトル場を水の流速に例えた場合、得られた結果から立方体の内部ではどういうことが起こっているか論じよ。

[4] ベクトル場 $\boldsymbol{A} = (x,\ y,\ z)$ とし、曲面 S の境界線を C とするとき、ストークスの定理を用いて

$$\int_C \boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{r} = 0$$

を示せ。

ベクトル解析 中間試験問題　1999.6.9

[1] ベクトル $\boldsymbol{A} = (2, -3, 1)$, $\boldsymbol{B} = (1, 3, -1)$ について次の問に答えよ。

(1) 外積 $\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}$ の方向余弦を求めよ。ベクトルの方向余弦とはそのベクトルと同じ向きの長さ 1 のベクトルをいう。

(2) $\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}$ は $\boldsymbol{A}$ と直交していることを示せ。

[2] スカラー場 $\varphi = \frac{x^3}{y^2} + x\cos z$ について次の問に答えよ。

(1) 勾配 $\nabla\varphi$ の 点 $(1, -1, \frac{\pi}{2})$ での値を求めよ。

(2) 点 $(1, -1, \frac{\pi}{2})$ におけるベクトル $(-1, 0, 2)$ 方向の $\nabla\varphi$ の方向微分係数を求めよ。

[3] 位置ベクトル $\boldsymbol{r} = (x, y, z)$ について次の問に答えよ。ただし、$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ とする。

(1) 発散 $\nabla \cdot (\frac{\boldsymbol{r}}{r})$ を計算せよ。

(2) 回転 $\nabla \times \boldsymbol{r}$ を計算せよ。

[4] (x, y) 平面上を走る自動車の時刻 t での位置が位置ベクトル $\boldsymbol{r}(t) = (te^{-t}, \log t)$ で表されているとする。このとき、$t = 1$ における速度ベクトル $\boldsymbol{r}'(1)$ と加速度ベクトル $\boldsymbol{r}''(1)$ を計算することで $t = 1$ 付近の $\boldsymbol{r}(t)$ のホドグラフ（軌道）の概図を描け。

微分公式

(i) $(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$ （積の公式）

(ii) $(\frac{f(x)}{g(x)})' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}$ （商の公式）

(iii) $y = f(x)$, $z = g(y)$ ならば $\frac{dz}{dx} = g'(y)f'(x)$ （合成関数の公式）

ベクトル解析 期末試験問題　1999.7.28

[1] ベクトル場 $\boldsymbol{A} = (x^2y,\ z,\ x+y+z)$ について次の問に答えよ. ただし, $P \to Q$ は P を始点, Q を終点とする線分を表す.

(1) 線分 $C_1 : O(0,0,0) \to P(2,1,3)$ 上の $\boldsymbol{A}$ の線積分を求めよ.

(2) 位置ベクトル $r(t) = (2t, t^2, 3t^3)$, $t : 0 \to 1$ で表される C_2 上の $\boldsymbol{A}$ の線積分を求めよ.

(3) 折れ線 $C_3 : O \to Q(2,1,0) \to P$ 上の $\boldsymbol{A}$ の線積分を求めよ.

(4) (1) から (3) の結果を踏まえて, 思うところを記せ.

[2] ベクトル場 $\boldsymbol{A} = (\cos x,\ \sin y,\ 2z)$ について次の問に答えよ.

(1) $\boldsymbol{A} = \nabla\varphi$ をみたす φ を求めよ.

(2) 折れ線 $(0,0,0) \to (\pi,0,0) \to (\pi,0,1) \to (\pi,\pi,1)$ 上の $\boldsymbol{A}$ の線積分を求めよ.

[3] 平面 S が

$$\begin{cases} 2x+y+z=1 \\ x \geqq 0,\ y \geqq 0,\ z \geqq 0 \end{cases}$$

で表されるとき, ベクトル場 $\boldsymbol{A} = (x,\ -y,\ z)$ について次の問に答えよ.

(1) S の面積を求めよ.

(2) $\boldsymbol{n}$ を S 上の法単位ベクトルとするとき, $\boldsymbol{A}$ の S 上の面積分 $\int_S \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{n}\, dS$ を求めよ.

(3) $\boldsymbol{A}$ を水の流速ベクトル場としたとき, S を通る総水量は原点方向とその反対方向でどちらが多いか, 答えよ.

ベクトル解析 中間試験問題　2000.6.7(水)

[1] ベクトル $\boldsymbol{A} = (1, -1, 2)$, $\boldsymbol{B} = (0, -1, 3)$ に対して $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}$（外積）とするとき

$$(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} + \boldsymbol{C}) \cdot (\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B} - \boldsymbol{C}) \qquad \text{内積}$$

を計算せよ．

[2] 標高がスカラー場 $\varphi(x, y) = x(y-1) + y^2$ で与えられている．次の問いに答えよ．

(1) 地点 $(1, -2)$ における勾配 $\nabla\varphi(1, -2)$ を求めよ．

(2) 地点 $(1, -2)$ において，方向 $(2, -1)$ と 方向 $(0, 3)$ のどちらが勾配がきついと考えられるか．方向微分係数を比較して答えよ．

(3) 勾配の大きさ $|\nabla\varphi|$ が最小となる地点 (x, y) を求めよ．

[3] $\boldsymbol{r} = (x, y, z)$ を位置ベクトル，$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ とする．次の計算をせよ．

(1) ∇r

(2) $\nabla \cdot \left(\dfrac{\boldsymbol{r}}{r^2}\right)$

(3) $\nabla \times (\nabla r)$

[4] 海底探査機メイビット号は時刻 t における位置ベクトル

$$\boldsymbol{r}(t) = (\sin \pi t,\ -\cos \pi t, -c\,t^2)$$

に従って航行中である．ただし，c は正の定数である．ある基準点 $(0, 0, 0)$ から水平方向たてを x 成分，横を y 成分，そして水深を z 成分で表す．例えば $(4, 5, 0)$ はたて 4, 横 5 の水面上を表し，$(4, 5, -5)$ はたて 4, 横 5, 水深 5 の地点を表す．次の問いに答えよ．

(1) 乗組員の安全のため加速度の大きさ $|\boldsymbol{a}(t)|$ を $2\pi^2$ 以下に押さえたい．定数 c はどの範囲にとれば良いか，c のとる範囲を求めよ．

(2) $c = 1$ としたとき，時刻 5 に海底に到達した．到達地点 A を求めよ．

(3) 探査を終えたメイビット号は (2) で求めた地点 A（時刻 0）を出発して時刻 t における速度

$$\boldsymbol{v}(t) = (6t^2,\ t-1,\ e^{2t})$$

で帰還を始めた．水面に到達する時刻を求めよ．

ベクトル解析 中間試験問題・解答　2000.6.7(水)

[1]

$$-15$$

[2] (1)

$$\nabla\varphi(x,y) = (y-1, x+2y)$$

より

$$\nabla\varphi(1,-2) = (-3,-3).$$

(2)　$(2,-1)$ 方向の方向微分係数は $-\sqrt{3}/5$. $(0,3)$ 方向の方向微分係数は -3. したがって $(0,3)$ 方向の方が勾配がきついと考えられる.

(3)

$$|\nabla\varphi| = \sqrt{(y-1)^2 + (x+2y)^2}$$

だから, $|\nabla\varphi| = 0$ となる x, y があればそれが求める地点となる. 実際, $y = 1, x = -2$ が求める地点.

[3] (1)

$$\nabla r = \left(\frac{x}{r}, \frac{y}{r}, \frac{z}{r}\right).$$

(2)

$$\nabla \cdot \left(\frac{\boldsymbol{r}}{r^2}\right) = \frac{1}{r^2}.$$

(3)　勾配の回転は零ベクトルだから

$$\nabla \times (\nabla r) = \mathbf{0}.$$

[4] (1)　加速度ベクトルは

$$\boldsymbol{r}''(t) = (-\pi^2 \sin \pi t,\ \pi^2 \cos \pi t, -2c).$$

条件

$$|\boldsymbol{r}''(t)| = \sqrt{\pi^4 + 4c^2} \leqq 2\pi^2$$

より

$$c \leqq \frac{\sqrt{3}\pi^2}{2}$$

を得る.

(2)　$c = 1$ を代入して $\boldsymbol{r}(5)$ を求めると

$$(0, 1, -25).$$

(3) 速度ベクトル $\boldsymbol{v}(t)$ から位置ベクトル $\boldsymbol{r}(t)$ を与える公式

$$\boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{r}(0) + \int_0^t \boldsymbol{v}(t)dt$$

を用いる．$\boldsymbol{r}(0) = (0, 1, -25)$ として計算すると $\boldsymbol{r}(t)$ の z 成分は

$$-\frac{51}{2} + \frac{e^{2t}}{2}.$$

したがって，z 成分が 初めて 0 になるときが求める時刻であるから

$$t = \frac{\log 51}{2}$$

を得る．

ベクトル解析 夜 期末試験問題　2000.8.4.(水)

注意

- 答案用紙には学籍番号，名前を書き，表裏両面を使うこと．
- 答案用紙には答えのみでなく，それに至る過程も記述すること．
- 試験終了後，解答は `http://inside.maebashi-it.ac.jp/~ken/2000test.htm` に公表する．

[問題] 座標空間上の 3 点 $P(2,0,0)$, $Q(0,1,0)$, $R(0,0,3)$ に対して折れ線

$$C : P \xrightarrow{C_1} Q \xrightarrow{C_2} R \xrightarrow{C_3} P$$

を定める．

(1) 線分 C_1, C_2, C_3 の位置ベクトル表示 $\boldsymbol{r}_1(t)$, $\boldsymbol{r}_2(t)$, $\boldsymbol{r}_3(t)$ をそれぞれ求めよ．t の動く範囲も忘れず明記せよ．

さて，ベクトル場（ベクトル値関数）$\boldsymbol{A}$ を次で定める：

$$\boldsymbol{A} = (y^2,\ 2x - 3z,\ yz)$$

(2) $\boldsymbol{A}$ の C 上の線積分

$$\int_C \boldsymbol{A} \cdot \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} dt$$

を求めよ．

次に，平面 S を次で与える：

$$S : \begin{cases} \frac{x}{2} + y + \frac{z}{3} = 1 \\ x \geqq 0, \quad y \geqq 0, \quad z \geqq 0 \end{cases}$$

(3) S を表す方程式 $\boldsymbol{r}(u,v)$ を求めよ．忘れずに (u,v) の動く範囲を明記せよ．

(4) S の法単位ベクトル $\boldsymbol{n}$ を求めよ．ただし，$\boldsymbol{n}$ の向きは S から原点 $(0,0,0)$ と反対の方向で定める．

さて，ベクトル場（ベクトル値関数）$\boldsymbol{B}$ を

$$\boldsymbol{B} = \nabla \times \boldsymbol{A} \quad （\boldsymbol{A} \text{ の回転}）$$

で定める[1]．

(5) $\boldsymbol{B}$ の S 上の面積分

$$\int_S \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{n} dS$$

を求めよ．

---

[1] $\boldsymbol{A} = (A_x, A_y, A_z)$ のとき $\nabla \times \boldsymbol{A}$ は $\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix}$ の第 1 行の展開で形式的に定義される．ただし，$\boldsymbol{i} = (1,0,0)$, $\boldsymbol{j} = (0,1,0)$, $\boldsymbol{k} = (0,0,1)$.

ベクトル解析 夜 期末試験問題・解答　2000.8.4.(水)

[解答] 今回の期末試験ではストークスの定理のひとつの実例を考えたことになる．すなわち，荒っぽく言うと，曲面 S の境界線 C を考えて，ベクトル場 $\boldsymbol{A}$ の C 上の線積分と $\nabla \times \boldsymbol{A}$ の S 上の面積分は等しい：

$$\int_C \boldsymbol{A} \cdot \frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\, dt = \int_S \nabla \times \boldsymbol{A}\, dS$$

(1)

$$C_1 : \boldsymbol{r}_1(t) = (2-2t, t, 0), \quad 0 \leqq t \leqq 1,$$
$$C_2 : \boldsymbol{r}_2(t) = (0, 1-t, 3t), \quad 0 \leqq t \leqq 1,$$
$$C_3 : \boldsymbol{r}_3(t) = (2t, 0, 3-3t), \quad 0 \leqq t \leqq 1.$$

(2)

$$\int_{C_1} \boldsymbol{A} \cdot \frac{d\boldsymbol{r}_1}{dt} dt = \frac{4}{3},$$
$$\int_{C_2} \boldsymbol{A} \cdot \frac{d\boldsymbol{r}_2}{dt} dt = 6,$$
$$\int_{C_3} \boldsymbol{A} \cdot \frac{d\boldsymbol{r}_3}{dt} dt = 0.$$

よって

$$\int_C \boldsymbol{A} \cdot \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} dt = \frac{4}{3} + 6 + 0 = \frac{22}{3}.$$

(3) $x = u$, $y = v$ とおくとき $z = 3 - \frac{3}{2}u - 3v$. よって

$$\boldsymbol{r}(u, v) = (u, v, 3 - \frac{3}{2}u - 3v), \quad (u, v) \in D,$$

ただし，D は $u \geqq 0$, $v \geqq 0$, $v \leqq -\frac{u}{2} + 1$ をみたす領域.

(4)

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v} = (\frac{3}{2}, 3, 1).$$

ゆえに

$$\boldsymbol{n} = (\frac{3}{7}, \frac{6}{7}, \frac{2}{7}).$$

(5)

$$\boldsymbol{B} = (z+3, 0, 2-2y)$$

であるから

$$\int_S \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{n} dS = \iint_D \boldsymbol{B} \cdot (\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}) du dv$$
$$= \iint_D (-2y + \frac{3}{2}z + \frac{13}{2})\, du dv = \iint_D (-\frac{9}{4}u - \frac{13}{2}v + 11) du dv = \frac{22}{3}.$$