7/19　解析入門

(1)　$\cos^{-1}\frac{1}{7} = \sin^{-1} x$　をみたす x を求めよ.

$y = \cos^{-1}\frac{1}{7} = \sin^{-1} x$　とおくと

$$\begin{cases} \frac{1}{7} = \cos y \\ 0 \leqq y \leqq \pi \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \sin y \\ -\frac{\pi}{2} \leqq y \leqq \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

恒等式から

$$1 = \cos^2 y + \sin^2 y$$
$$= \left(\frac{1}{7}\right)^2 + x^2 = \frac{1}{49} + x^2 \qquad \therefore\ x^2 = \frac{48}{49}$$

$\therefore\ x = \pm\frac{\sqrt{48}}{7}$

ここで $\cos y > 0$ より　$0 < y < \frac{\pi}{2}$.　よって　$x = \sin y > 0$.

ゆえに　$x = \frac{\sqrt{48}}{7}$

(2).　$\cos^{-1}(\cos x) = x$　が成立する x の範囲を考える.

一般に f の逆関数 f^{-1} に対して, f の定義域の点 x ならば

$$f^{-1}(f(x)) = x.$$

が成立するから(定義域と値域の関係), 求める範囲は

$$0 \leqq x \leqq \pi.$$

たとえば　$x = 2\pi$　とすると　$\cos 2\pi = 1$, $\cos^{-1} 1 = 0$.　ゆえに

$$\cos^{-1}(\cos 2\pi) = 0 \neq 2\pi.$$