11/10, '05　小テスト

1. 導関数を求めよ.

$$\tan^4 2x.$$

2. xの負べきの導関数

$$(x^{-n})' = -n x^{-n-1}$$

を数学的帰納法で導け. ただし,

$$(x^n)' = n x^{n-1} \quad (n=1, 2, 3, \cdots)$$

を用いよ.

3. $(e^x)' = e^x$ を $(\log x)' = \frac{1}{x}$ から

導け.

解答

1. $\tan^4 2x$ は
$$u = 2x$$
$$v = \tan u$$
$$w = v^4$$
の合成.

よって,
$$(\tan^4 2x)' = (v^4)'(\tan u)'(2x)'$$
$$= 4v^3 \frac{1}{\cos^2 u} 2$$
$$= \frac{8\tan^3 2x}{\cos^2 2x}.$$

2. $n=1$ のとき
$$(x^{-1})' = \left(\frac{1}{x}\right)' = \frac{-1\cdot(x)'}{x^2} = \frac{-1}{x^2} = -x^{-2} \quad (商の公式)$$
より o.k.

n で成立と仮定して, $n+1$ のときを考えると,

$$(x^{-(n+1)})' = (x^{-n}\cdot x^{-1})' = (x^{-n})'(x^{-1}) + (x^{-n})(x^{-1})' \quad (積の公式)$$

$$= -n x^{-n-1}\cdot x^{-1} + x^{-n}(-x^{-2}) = -(n+1)x^{-(n+2)}$$
$$= -(n+1)x^{-(n+1)-1} \quad //.$$

3. $y = e^x$ とおくと $x = \log y$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{1/y} = y = e^x \quad \therefore (e^x)' = e^x.$$