12/1　小テスト　第3回

1.　$(\tan^{-1} x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$　を導け

2.　$f(x) = x^2 e^{-x}$ の極値をすべて求めよ.

さらに $x=5$ の近傍の増減を調べよ.

3.　$f(x) = \log(1-3x)$ の3次のマクローリンの定理

をもとめよ.

[解答]

1. $y = \tan^{-1} x \iff x = \tan y \quad \left(-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2} \right)$

$$\therefore \frac{dx}{dy} = \frac{1}{\cos^2 y} = 1 + \tan^2 y = 1 + x^2$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = 1 \Big/ \frac{dx}{dy} = \frac{1}{1+x^2}.$$

2. $f'(x) = 2xe^{-x} + x^2(-1)e^{-x} = x(2-x)e^{-x}$

$f'(x) = 0$ をもとめると $x = 0, 2$.（停留点）

$$f''(x) = 2e^{-x} + 2x(-1)e^{-x} - 2xe^{-x} + x^2e^{-x}$$

$$= e^{-x}(x^2 - 4x + 2)$$

$f''(0) = 2 > 0 \quad \therefore\ f(0)$ は極小値.

$f''(2) = e^{-2}(-2) < 0 \quad \therefore\ f(2)$ は極大値.

さらに

$f'(5) = -15e^{-5} < 0$. よって減少している.

3. 3次のマクローリン

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(c)}{3!}x^3$$

をみたす c が 0 と x の間に存在する.

$$f(0) = 0$$

$$f'(x) = \frac{-3}{1-3x} \qquad \therefore\ f'(0) = -3$$

$$f''(x) = \frac{3(-3)}{(1-3x)^2} = \frac{-9}{(1-3x)^2} \qquad \therefore\ f''(0) = -9$$

$$f'''(x) = \frac{9 \cdot 2(1-3x)(-3)}{(1-3x)^4} = \frac{-54}{(1-3x)^3} \qquad \therefore\ f'''(c) = \frac{-54}{(1-3c)^3}$$

以上から

$$\log(1-3x) = -3x - \frac{9}{2}x^2 + \frac{-54}{6(1-3c)^3}x^3 .$$