

[問]: α, β について, 次の方程式が (i) 解をただ一つもつ (ii) 解を無数にもつ (iii) 解をもたない, それぞれの条件を求め, (α, β) 平面に図示せよ.

$$\begin{cases} 3x + 4y + \alpha z = 1 \\ 2x + 3y + 9z = \beta \\ 5x + 7y + 20z = -5 \end{cases}$$

[答]: 拡大係数行列を基本変形により

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & \alpha & 1 \\ 2 & 3 & 9 & \beta \\ 5 & 7 & 20 & -5 \end{pmatrix} \rightarrow \cdots \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3\alpha - 36 & -4\beta + 3 \\ 0 & 1 & -2\alpha + 27 & 3\beta - 2 \\ 0 & 0 & -\alpha + 11 & -\beta - 6 \end{pmatrix}$$

ここで,

もし $-\alpha + 11 \neq 0$ ならば ③ $\times \frac{1}{-\alpha+11}$ により (3,3) 成分を 1 にすることができて, さらに第 3 列をはきだすことで, 解はただ一つ.

もし $-\alpha + 11 = 0$ のときは存在条件により $-\beta - 6 = 0$ ならば解は無数である.

もし $-\alpha + 11 = 0$ かつ $-\beta - 6 \neq 0$ のときは存在条件をみたさないの解なし

以上から

$$\begin{cases} \alpha \neq 11 & \implies \text{解はただひとつ} \\ \alpha = 11 \text{ かつ } \beta = -6 & \implies \text{解は無数} \\ \alpha = 11 \text{ かつ } \beta \neq -6 & \implies \text{解なし} \end{cases}$$

K.U.