

[問] :  $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 2$  のとき, 次の値を求めよ.

$$\begin{vmatrix} a+2c & b+2d \\ c-a & d-b \end{vmatrix}$$

[答] :

$$\begin{aligned} & \begin{vmatrix} a+2c & b+2d \\ c-a & d-b \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} a & b \\ c-a & d-b \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2c & 2d \\ c-a & d-b \end{vmatrix} \quad (\text{第1行の和の線形性}) \\ &= \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b \\ -a & -b \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2c & 2d \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2c & 2d \\ -a & -b \end{vmatrix} \quad (\text{第2行の和の線形性}) \end{aligned}$$

ここで

(i) 第2項 :

$$\begin{vmatrix} a & b \\ -a & -b \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a & b \\ a & b \end{vmatrix} \quad (\text{第2行のスカラー倍の線形性})$$

そして, 第1行と第2行を交換すると

$$\begin{vmatrix} a & b \\ a & b \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a & b \\ a & b \end{vmatrix}$$

これをみたすには  $\begin{vmatrix} a & b \\ a & b \end{vmatrix} = 0$  でなければならない. よって,

$$\begin{vmatrix} a & b \\ -a & -b \end{vmatrix} = 0.$$

(ii) 第3項 :

$$\begin{vmatrix} 2c & 2d \\ c & d \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} c & d \\ c & d \end{vmatrix}$$

第1行と第2行が同じなので  $\begin{vmatrix} c & d \\ c & d \end{vmatrix} = 0$ . よって,

$$\begin{vmatrix} 2c & 2d \\ c & d \end{vmatrix} = 0.$$

(iii) 第4項:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 2c & 2d \\ -a & -b \end{vmatrix} &= 2 \begin{vmatrix} c & d \\ -a & -b \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} c & d \\ a & b \end{vmatrix} & \text{(スカラー倍の線形性)} \\ &= 2 \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} & \text{(第1行と第2行の交換)} \\ &= 4. \end{aligned}$$

以上から

$$\begin{vmatrix} a+2c & b+2d \\ c-a & d-b \end{vmatrix} = 2 + 4 = 6.$$

*K.U.*