

4.  $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$  のとき,  $BC - A^2$  を計算せよ.

$$\begin{pmatrix} -15 & 16 \\ 13 & 3 \end{pmatrix}$$

2. 2つの行列  $A, B$  を考える。ただし  $a$  は実数とする。

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & a \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$AB = BA$  をみたす  $a$  を求めよ。  $a = 0$ .

3. 次の行列の逆行列を求めよ。(基本変形を用いて)

$$\begin{pmatrix} 3 & 7 & -3 \\ 1 & 4 & -2 \\ -5 & -7 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & -7 & 2 \\ -8 & 9 & -3 \\ -13 & 14 & -5 \end{pmatrix}$$

4. 次の行列の階数 (rank) を求めよ。

ランク 2

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -4 & -1 & 5 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

5. 次の連立方程式を解け。

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x - y + z + w = 2 \\ 2x - y - 2z - 2w = 1 \\ x + y - 7z - 7w = -4 \\ 3x - y - 5z - 5w = 0 \end{cases}$$

6.  $a$  を実数とするととき、次の連立方程式を考える。

$$\begin{cases} -x + 2y + z = 0 \\ 3x - 5y + az = 3 \\ x + ay - z = 0 \end{cases}$$

次の3つ場合について、 $a$  の満たすべき条件を求めよ。

- (i) 解を唯一つもつ。  $a \neq -2, -3$
- (ii) 解を無数にもつ。  $a = -2$
- (iii) 解をもたない。  $a = -3$

7. 次の積を計算せよ。

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 17 \end{pmatrix}$$

8. 次の行列式を計算せよ。

(1) 
$$\begin{vmatrix} 4 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 5 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -62$$

(2) 
$$\begin{vmatrix} 2 & 2^2 & 2^3 \\ 3 & 3^2 & 3^3 \\ 4 & 4^2 & 4^3 \end{vmatrix} = 48$$

9. つぎの行列式を計算せよ。

$$\begin{vmatrix} 4 & 6 & -4 & 2 \\ 3 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 0 & -5 \\ 0 & 3 & -2 & 1 \end{vmatrix} = -96$$

10. 次の行列について以下の問いに答えよ。

$$A = \begin{pmatrix} -5 & -4 & 3 \\ 4 & 0 & -1 \\ 6 & -4 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{28} \begin{pmatrix} -4 & -4 & 4 \\ -14 & -28 & 7 \\ -16 & -44 & 16 \end{pmatrix}$$

- (1) 余因子をすべて求めよ。 18点
- (2) 逆行列を求めよ。

11. 次の行列式を因数分解の形で求めよ。

$$\begin{vmatrix} 1 & p & p^2 \\ 1 & q & q^2 \\ 1 & r & r^2 \end{vmatrix} = (p-q)(q-r)(r-p)$$

12. つぎの行列が逆行列を持つための  $a, b, c$  の条件を求めよ。

$$\begin{pmatrix} 1 & a & bc \\ 1 & b & ca \\ 1 & c & ab \end{pmatrix} \begin{vmatrix} 1 & a & bc \\ 1 & b & ca \\ 1 & c & ab \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b) \neq 0$$

$\therefore a, b, c$  が相異ならず。

13.

3次正方行列  $A$  の行列式  $|A|$  の値は  $-1$  である。このとき、 $A$  のすべての成分が整数ならばその逆行列  $A^{-1}$  の成分もすべて整数であることを示せ。余因子はすべて整数であるから  $A^{-1} = -A$  となる。