線形数学 I (担当：梅津健一郎)

2007 年 7 月 9 日

1　高次行列式の導入 *

ここでは厳密な議論を避け，２次正方行列の行列式の性質を通して一般の行列式の扱いについて学ぶ．

２次正方行列

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

に対して

$$|A| = ad - bc$$

を A の行列式という．$|A|$ の代わりに $\det A$ と表すこともある．

例 1.1

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 6 = -2$$

行列式の概念は実際には行列以前に存在していた．座標平面上の点 $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$ を結ぶ線分と，$\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$ を結ぶ線分で決まる平行四辺形の面積 S は

$$S = \left| \det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right|$$

で与えられる．

問題 1.1 これを示せ．

２次正方行列において行列式の果たす役割は正則性を特徴づけることにある．次の結果が成り立つ．

定理 1.1 ２次正方行列 A に対して，A が正則であるための必要十分条件は $|A| \neq 0$ である．また，$|A| \neq 0$ のとき，その逆行列は

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

で与えられる．

問題 1.2 行列の基本変形により，定理 1.1 の中の逆行列を与える公式を導け．

２次行列式に関する結果をふまえて，ここでの目的は以下のとおりである．

- ３次以上の高次行列式を理解する．
- 高次の場合の行列の正則性と行列式の関係，及び逆行列を与える公式する．

さて，実際には高次行列式の導入は以下のように行われる．

- 行列式の定義.
- 定義から種々の性質を導き出す.
- 性質を用いて行列式の計算を行う．**定義から計算を行うのではない**.
- 性質から正則性との関係をみる

ここでは立場は <u>行列式の性質を出発点</u> とする．定義及び定義からの性質の導出には触れない．

1.1 ２次行列式の性質

２次行列式の性質を見る．いずれの性質も実際に直接の計算により確認することができる．

(1) 列における成分の和について分配則が成り立つ：

$$\begin{vmatrix} a+a' & b \\ c+c' & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a' & b \\ c' & d \end{vmatrix}$$

(2) 列におけるスカラー倍について結合則が成り立つ：

$$\begin{vmatrix} \alpha a & b \\ \alpha c & d \end{vmatrix} = \alpha \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

(1), (2) の性質を合わせて**線形性**という．線形性は各列に対して成り立つ．

(3) 列の交換は行列式の符号を反転させる：

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} b & a \\ d & c \end{vmatrix}$$

(4) 転置[1] は行列式の値を変えない：

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}$$

(5) 単位行列の行列式は 1 である：

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

(6) 行列の積と行列式の操作は交換可能である：$|AB| = |A||B|$.

以上 (1)-(6) が基本的な性質であるが，これらから導かれる重要な性質を次に述べる．

(7) 列についての性質はすべて行についても成り立つ．例えば，線形性である：

$$\begin{vmatrix} a+a' & b+b' \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a' & b' \\ c & d \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} \alpha a & \alpha b \\ c & d \end{vmatrix} = \alpha \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

問題 1.3 これらを性質 (1), (2), (4) から導け．

(8) 同じ列（または行）が並ぶと行列式の値は 0 である：

$$\begin{vmatrix} a & b \\ a & b \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} a & a \\ c & c \end{vmatrix} = 0$$

問題 1.4 これを性質 (3) から導け．

(9) 列，行についてはき出しを行っても行列式の値は変わらない：例えば

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{② + ① \times(-3)} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{2\text{列} + 1\text{列} \times(-2)} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$$

[1]行列 A の行と列を入れ替えて新しい行列を作ることを**転置**といい，${}^tA$ で表す．

において，どの行列の行列式の値も -2 である．実際，最初の例についてみると，線形性と性質 (8) により

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3+1\times(-3) & 4+2\times(-3) \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1\times(-3) & 2\times(-3) \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} + (-3)\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}\end{aligned}$$

問題 1.5 $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 2$ のとき，次の値を求めよ．ただし，直接計算してはならない．上の性質 (1)-(9) のみを用いて導け．

$$\begin{vmatrix} a+2c & b+2d \\ c-a & d-b \end{vmatrix}$$

1.2 高次行列式の導入

高次の行列式も 2 次行列式がもつ性質を同等にもつ．

定理 1.2 一般の n 次正方行列 A に対して，上で述べた性質 (1)-(6) をもつ行列式 $|A|$ がただ一つ定義可能である．

例 1.2 (1) ある列（行）の成分がすべて 0 ならば行列式は 0 である：

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 4 & 0 & 6 \\ 7 & 0 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

(2) はきだしによる不変性から 0 成分を作ることができる.

$$\begin{vmatrix} 2 & -4 & 3 \\ 1 & -2 & 5 \\ 3 & -3 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -7 \\ 1 & -2 & 5 \\ 0 & 3 & -13 \end{vmatrix} \quad \text{第 1 列のはきだし}$$

$$= \begin{vmatrix} 2 & 0 & -7 \\ 1 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & -13 \end{vmatrix} \quad \text{第 2 行のはきだし}$$

1.3 行列式の計算の実際

行列式の計算は性質 (1)-(6) に加え，次の結果を用いて行われる：

命題 1.1 n 次正方行列 A が第 n 列について a_{nn} を除いてすべての成分が 0 のとき，

$$\begin{vmatrix} A' & O \\ * & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{nn}|A'|$$

が成り立つ.

注意 1.1 (i) この結果の本質は n 次の計算が $(n-1)$ 次の計算に帰着される点にある.
(ii) 転置の不変性により行について同じ結果が従う：

$$\begin{vmatrix} A' & * \\ O & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{nn}|A'|$$

(iii) 実際の計算は以下のように行う.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 2 & 8 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 4 & 1 \end{vmatrix} \quad \text{第 1 列のはきだし}$$

$$= -\begin{vmatrix} 0 & 4 & 1 \\ 0 & -3 & -6 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} \quad \text{1 行と 3 行の交換}$$

$$= (-1)(-1)\begin{vmatrix} 1 & 4 & 0 \\ -6 & -3 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} \quad \text{1 列と 3 列の交換}$$

$$= 1 \times \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -6 & -3 \end{vmatrix} \quad \text{命題 1.1 の結果}$$

$$= 21$$

証明　$n = 3$ の場合に証明する．示すべき結果は

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{33} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

まず，性質 (2) から

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{33} \times 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{33} \times 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \times 1 \end{vmatrix} = a_{33} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & 1 \end{vmatrix}.$$

1 を軸にして第 3 行をはき出すと

$$= a_{33} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

ここから $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ を $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ にすることを考える．簡単のため，$a_{11} \neq 0$ とする．第 1 行について，性質 (2) から

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} 1 & \frac{a_{12}}{a_{11}} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

第 1 列をはきだすと

$$= a_{11} \begin{vmatrix} 1 & \frac{a_{12}}{a_{11}} & 0 \\ 0 & a_{22} - \frac{a_{12}a_{21}}{a_{11}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

第 2 行について性質 (2) を用いて

$$= a_{11} \frac{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}{a_{11}} \begin{vmatrix} 1 & \frac{a_{12}}{a_{11}} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

第2列をはきだすと

$$= (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

性質 (5) から $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$ なので

$$= a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

以上で導けた．■

注意 1.2 $n \geq 4$ の場合には一般にこの方法で導くことは困難である．

問題 1.6 $a_{11} = 0$ の場合にはどのように考えればよいか．

1.4 発展

ここまでで行列式の計算は一応可能となった．しかしながら，計算の簡略化，行列の正則性との関係を求めるためにさらなる考察が必要である．特に命題 1.1 をより一般の形に拡張する．以下は余因子展開へ．