線形数学 II 演習問題

2007 年 11 月 12 日

1. $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ がある．始点が $\begin{pmatrix} 9 \\ -3 \end{pmatrix}$ で，$\boldsymbol{a}$ と同じ向きで，大きさが 4 倍のベクトルの終点を求めよ．

2. 2 次元ベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ について，$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ は一次独立であるとする．$-2\boldsymbol{b} + 4\boldsymbol{b}$ を作図せよ．

3. 2 次元ベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ について，$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ は一次従属であるとする．$3\boldsymbol{b} - \frac{1}{2}\boldsymbol{b}$ を作図せよ．

4. $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix}$ がある．$\mathbf{c} = \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \end{pmatrix}$ を $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の一次結合で表せ．

5. ベクトル列 $\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}, \boldsymbol{a}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ は一次独立であるか，一次従属であるか判定せよ．

6. x, y 平面における直線 $y = -4x + 3$ 上の点 $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ の位置ベクトル $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ を 2 つの定ベクトルの一次結合で表せ．

7. ベクトル列 $\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{a}_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ -5 \\ 0 \\ -6 \end{pmatrix}$ は一次独立であるか，一次従属であるか判定せよ．

8. 空間 $V(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -6 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -9 \\ 4 \\ 17 \end{pmatrix})$ の基底を求めよ．

9. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ は $\mathbf{x}$ を $\frac{\pi}{3}$ (60^o)-回転させる．$g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ は $\mathbf{x}$ を y 軸に関して対称に写す．$g \circ f$, $f \circ g$ は合成写像を表す．
   (a) $\mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ のとき，$(g \circ f)(\mathbf{x}_0)$ を求めよ．また，$(f \circ g)(\mathbf{x}_0)$ を求めよ．
   (b) $g \circ f$ の表現行列を求めよ．また，$f \circ g$ の表現行列を求めよ．

10. 伝染病の問題を考える．健康な人 x_0 (人), 病気の人 y_0 (人), 亡くなった人 z_0 (人)．毎月，健康な人の 1/10 が患い，1/20 が亡くなり，病気の人の 1/8 が治り，1/16 が亡くなる．翌月の健康な人 x_1 (人), 病気の人 y_1 (人), 亡くなった人 z_1 (人)．
    (a) $f : \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$ の表現行列を求めよ．
    (b) $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100 \\ 50 \\ 20 \end{pmatrix}$ であるとき，3 ヶ月後の健康な人 x_3, 病気の人 y_3, 亡くなった人 z_3 を求めよ．

[**解答**]

1. 求める終点を $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ とすると，

$$\begin{pmatrix} x-9 \\ y-(-3) \end{pmatrix} = 4\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} -12 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

ゆえに $x=-3, y=1$.

2. 略

3. 略

4. c_1, c_2 をスカラーとして

$$c_1\boldsymbol{a} + c_2\boldsymbol{b} = \mathbf{c}$$

とおく．これは

$$\begin{aligned} 3c_1 - c_2 &= -4 \\ c_1 + 5c_2 &= -2 \end{aligned}$$

の連立方程式であるから，拡大係数行列を作って

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & -4 \\ 1 & 5 & -2 \end{pmatrix} \to\to \cdots \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -11/8 \\ 0 & 1 & -1/8 \end{pmatrix}.$$

したがって，$c_1 = -11/8,\ c_2 = -1/8$. ゆえに

$$\mathbf{c} = -\frac{11}{8}\boldsymbol{a} - \frac{1}{8}\boldsymbol{b}.$$

5. $A = (\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{a}_2\boldsymbol{a}_3)$ で行列を作る．基本変形により，$\mathrm{rank}A = 3$ であるから，$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ は一次独立である．

6. $y = -4x + 3$ から $x = t$ とおいてパラメータ表示を行うと，

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ -4t+3 \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ とおくと

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = t\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}.$$

7. 問 5 と同様，行列 $A = (\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{a}_2\boldsymbol{a}_3)$ を作り，基本変形を行うと，$\mathrm{rank}A = 3$. よって一次独立である．

8. ベクトル列から行列

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -6 & -9 \\ -2 & 5 & 4 \\ 3 & 4 & 17 \end{pmatrix}$$

を作って基本変形を行うと，行変形のみで標準形を得て，ランクは 2. したがって，基底は

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -6 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$$

となり，空間の次元は 2 である．

9.

$$f(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \cos 60^o & -\sin 60^o \\ \sin 60^o & \cos 60^o \end{pmatrix} \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix} \mathbf{x}$$

$$g(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad g(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

であるから，

$$g(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x}.$$

よって合成写像は

$$(g \circ f)(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix} \mathbf{x} = \begin{pmatrix} -1/2 & \sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix} \mathbf{x}$$

$$(f \circ g)(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x} = \begin{pmatrix} -1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix} \mathbf{x}$$

特に，

$$(g \circ f)(\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} \frac{-3+5\sqrt{3}}{2} \\ \frac{5+3\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$$
$$(f \circ g)(\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} \frac{-3-5\sqrt{3}}{2} \\ \frac{5-3\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$$

10.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 17/20 \\ 1/10 \\ 1/20 \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1/8 \\ 13/16 \\ 1/16 \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

であるから

$$f(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 17/20 & 1/8 & 0 \\ 1/10 & 13/16 & 0 \\ 1/20 & 1/16 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x}.$$

続いて問題 (b).

$$A = \begin{pmatrix} 17/20 & 1/8 & 0 \\ 1/10 & 13/16 & 0 \\ 1/20 & 1/16 & 1 \end{pmatrix}$$

とおくと,

$$A^2 = \begin{pmatrix} 147/200 & 133/640 & 0 \\ 133/800 & 861/1280 & 0 \\ 79/800 & 153/1280 & 1 \end{pmatrix}.$$

A^3 はかなり大変ですね．数値が適当でありませんでした，申し訳ありません．電卓を使用してください．とにかく力ずくで計算すると,

$$A^3 = \begin{pmatrix} \dfrac{41314}{64000} & \dfrac{26698}{102400} & 0 \\ \dfrac{13349}{64000} & \dfrac{58093}{102400} & 0 \\ \dfrac{9337}{64000} & \dfrac{17609}{102400} & 1 \end{pmatrix}.$$

最後に初期データ $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100 \\ 50 \\ 20 \end{pmatrix}$ をかけると,

$$\begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{pmatrix} = A^3 \begin{pmatrix} 100 \\ 50 \\ 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{794514}{10240} \\ \dfrac{504049}{10240} \\ \dfrac{442237}{10240} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 77.59 \\ 49.22 \\ 43.19 \end{pmatrix}$$

検算してみると

$$77.59 + 49.22 + 43.19 = 170.$$

これは最初の $100 + 50 + 20 = 170$ と同じ.

結果を見て特徴的なのは，３年経っても病気の人の数がほとんど不変であること，健康な人の減少数がそのまま亡くなった人の増加数になっていることです．n ヶ月後どのようになると想像しますか？さらに時間が無限に経過したとき，どのような分布になると思いますか？

K.U.