線形数学 II　1

2007.10.8

問：一次独立，一次従属を判定せよ．

(1) $a_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$，$a_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \end{pmatrix}$

(2) $a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$，$a_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$，$a_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$

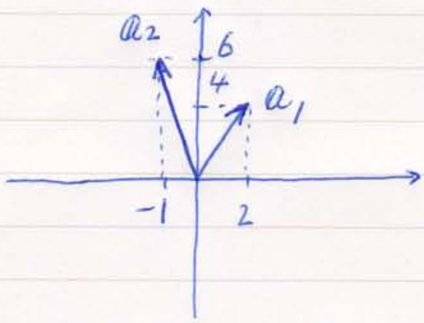
(3) $a_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$，$a_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$，$a_3 = \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ -1 \\ -6 \end{pmatrix}$.

答：(1). $c_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ とおく．

$$\Rightarrow \begin{array}{c} \begin{array}{cc} c_1 & c_2 \end{array} \\ \left(\begin{array}{cc:c} 2 & -1 & 0 \\ 4 & 6 & 0 \end{array}\right) \end{array} \to \to \cdots \to \begin{array}{c} \begin{array}{cc} c_1 & c_2 \end{array} \\ \left(\begin{array}{cc:c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \end{array} \quad \therefore \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

自明解のみ．

∴ 一次独立．



(2) $c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ とおく．

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & -3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right) \to \to \cdots \to \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

自明解のみ．

∴ 一次独立．

(3) $c_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ -1 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc:c} -2 & 3 & 7 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 4 & 2 & -6 & 0 \end{array}\right) \to \to \cdots \to \left(\begin{array}{cc|c:c} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

：解は無数

∴ 一次従属．

rank 2

問　$\mathbb{R}^n$ のベクトル列 $a_1, \cdots, a_r$ (r コ) は，$r > n$ ならば

常に一次従属であることを示せ．

答　$c_1 a_1 + \cdots + c_r a_r = 0$　とおく．

$$a_j = \left.\begin{pmatrix} \vdots \\ \vdots \end{pmatrix}\right\} n$$

$\Rightarrow$ 拡大係数行列．

$$(\, a_1 \ a_2 \ \cdots \ a_r \,\vdots\, 0 \,)$$

$$= n \left\{ \left(\begin{array}{ccc|c} \underbrace{\begin{matrix} * & \cdots & * \\ \vdots & & \vdots \\ * & \cdots & * \end{matrix}}_{r} & & & \begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} \end{array} \right) \right.$$

今，$r > n$ だから係数行列は横長の行列である．したがって，必ず"解が無数"となる標準形に変形される．ゆえに一次従属 //