線形数学 II

2007.10.15

問　基底をもとめよ.

(1) $V\left(\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\-3\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}\right)$

(2) $V\left(\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}6\\5\\4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}4\\1\\-2\end{pmatrix}\right)$

(3) $V\left(\begin{pmatrix}1\\2\\0\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\1\\0\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\3\\1\\0\end{pmatrix}\right)$

答: (1)

$$\begin{pmatrix}1 & 3 & 0\\ 1 & -3 & 1\\ -1 & 2 & 2\end{pmatrix} \to \cdots \to \begin{pmatrix}1 & & \\ & 1 & \\ & & 1\end{pmatrix}$$, よって $\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\-3\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}$

が基底の3次元. 3次元ベクトルの空間を考えているので,

$$V\left(\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\-3\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}\right) = \mathbb{R}^3.$$

(2)

$$\begin{pmatrix}1 & 6 & 4\\ 2 & 5 & 1\\ 3 & 4 & -2\end{pmatrix} \to \cdots \to \left(\begin{array}{cc|c}1 & 0 & -2\\ 0 & 1 & 1\\ \hline 0 & 0 & 0\end{array}\right)$$ rank 2

よって. $\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}6\\5\\4\end{pmatrix}$ が基底の2次元.

(3)

$$\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 2 & 1 & 3\\ 0 & 0 & 1\\ -1 & 2 & 0\end{pmatrix} \to \cdots \to \begin{pmatrix}1 & & \\ & 1 & \\ & & 1\\ & & \end{pmatrix}$$ rank 3.

よって. $\begin{pmatrix}1\\2\\0\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\1\\0\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\3\\1\\0\end{pmatrix}$ が基底の3次元.

問　次の連立方程式の解集合の基底を求めよ.

$$\begin{cases} x + 2z - w = 0 \\ -2x + y - 5z + 4w = 0 \\ 3x + 4y + 2z + 5w = 0 \\ -x - 3y + z - 5w = 0 \end{cases}$$

答　拡大係数行列.

$$\left(\begin{array}{cccc:c} 1 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & -5 & 4 & 0 \\ 3 & 4 & 2 & 5 & 0 \\ -1 & -3 & 1 & -5 & 0 \end{array}\right) \to \cdots\cdots \to \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x & y & \overset{t}{z} & \overset{=s}{w} \end{array} \\ \left(\begin{array}{cc|cc:c} 1 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \end{array}$$

$$\therefore \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2t + s \\ t - 2s \\ t \\ s \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (t, s \text{は実数})$$

よって 解集合(解全体)は

$$V\left(\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \qquad 2\text{次元}$$

で与えられる.

※ この2つのベクトルは確かめるまでもなく、
一次独立である。すなわち基底である。
なぜか?