問：$\mathbf{x}=\begin{pmatrix}2\\8\end{pmatrix}$, $\mathbf{y}=\begin{pmatrix}-3\\-2\end{pmatrix}$ がなす角 θ の $\cos\theta$ を求めよ。

答：$(\mathbf{x},\mathbf{y}) = -6-16 = -22$.

$|\mathbf{x}| = \sqrt{(\mathbf{x},\mathbf{x})} = \sqrt{4+64} = \sqrt{68} = 2\sqrt{17}$.

$|\mathbf{y}| = \sqrt{(\mathbf{y},\mathbf{y})} = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}$.

$$\therefore \cos\theta = \frac{(\mathbf{x},\mathbf{y})}{|\mathbf{x}|\,|\mathbf{y}|} = \frac{-22}{2\sqrt{17}\cdot\sqrt{13}} = -\frac{11}{\sqrt{221}}.$$

特に θ は ~~鋭角~~ どん角 ($\theta > 90°$) である。

問：$\mathbf{x}=\begin{pmatrix}4\\-3\end{pmatrix}$, $\mathbf{y}=\begin{pmatrix}b\\-4\end{pmatrix}$ は直交している。b を求めよ。

また、そのときの $\mathbf{y}$ の正規化を求めよ。

答：$(\mathbf{x},\mathbf{y}) = 4b+12$

$\mathbf{x}\perp\mathbf{y} \Leftrightarrow (\mathbf{x},\mathbf{y})=0$ より $4b+12=0$ $\therefore b=-3$.

このとき、$\mathbf{y}=\begin{pmatrix}-3\\-4\end{pmatrix}$. $\mathbf{y}$ を正規化すると、

$$\mathbf{y}' = \frac{1}{|\mathbf{y}|}\mathbf{y} = \frac{1}{\sqrt{9+16}}\begin{pmatrix}-3\\-4\end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix}-3\\-4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-3/5\\-4/5\end{pmatrix}.$$

問：$\mathbf{a}=\begin{pmatrix}-1\\\beta\end{pmatrix}$, $\mathbf{b}=\begin{pmatrix}\alpha\\-3\end{pmatrix}$, $\mathbf{c}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ は次の条件をみたす。

(i) $\mathbf{a}\perp\mathbf{b}$

(ii) $|\mathbf{a}|=2$

(iii) $\mathbf{b}$ と $\mathbf{c}$ のなす角 θ は $0<\theta<\underset{(90°)}{\frac{\pi}{2}}$.

α, β を求めよ。

答：　$(\mathbb{a}, \mathbb{b}) = -\alpha - 3\beta = 0$.

$|\mathbb{a}| = \sqrt{(\mathbb{a}, \mathbb{a})} = \sqrt{1 + \beta^2} = 2$

$\therefore\ 1 + \beta^2 = \cancel{2}^{4} \iff \beta^2 = \cancel{1}^{3} \iff \beta = \pm \cancel{1}^{\sqrt{3}}$.

$\therefore\ \alpha = -3\beta = \mp 3\sqrt{3}$.　$\therefore \begin{cases} \alpha = -3\sqrt{3} \\ \beta = \cancel{1}\ \sqrt{3} \end{cases}, \begin{cases} \alpha = 3\sqrt{3} \\ \beta = \cancel{-1}, -\sqrt{3} \end{cases}$

最後に

$(\mathbb{b}, \mathbb{c}) = \alpha$,　なす角 θ が $0 < \theta < \frac{\pi}{2} \iff (\mathbb{b}, \mathbb{c}) < 0$

$\iff \alpha < 0$

よって求める α, β は　$\alpha = \cancel{-3}\ -3\sqrt{3}$, $\beta = \cancel{1}^{\sqrt{3}}$.