問 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$ で定まる線形写像 $f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$

について, $\boldsymbol{x}$ を与えて $f(\boldsymbol{x})$ を作図せよ.

答 Aの固有値を求める.

$$0 = |\lambda E_2 - A| = \begin{vmatrix} \lambda-1 & -4 \\ -5 & \lambda-2 \end{vmatrix} = (\lambda-1)(\lambda-2) - 20$$

$$= \lambda^2 - 3\lambda - 18 = \underline{(\lambda-6)(\lambda+3)}$$

$\therefore$ $\underline{\lambda = -3, 6. \ (固有値)}$

固有空間を求める.

・$\lambda = -3$ のとき,

$$((-3)E_2 - A)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \begin{pmatrix} -4 & -4 \\ -5 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

拡大,

$$\left(\begin{array}{cc|c} -4 & -4 & 0 \\ -5 & -5 & 0 \end{array}\right) \to \to \cdots \to \begin{array}{c} \begin{array}{cc} x & y = t \end{array} \\ \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \end{array} \quad ランク 1.$$

$$\therefore \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -t \\ t \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}. \qquad \therefore V(-3) = \underline{V\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)}.$$

・$\lambda = 6$ のとき,

$$(6E_2 - A)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 5 & -4 \\ -5 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

拡大,

$$\left(\begin{array}{cc|c} 5 & -4 & 0 \\ -5 & 4 & 0 \end{array}\right) \to \to \cdots \to \begin{array}{c} \begin{array}{cc} x & y = t \end{array} \\ \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -4/5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \end{array} \quad ランク 1.$$

$$\therefore \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{5}t \\ t \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} \frac{4}{5} \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \therefore V(6) = \underline{V\left(\begin{pmatrix} \frac{4}{5} \\ 1 \end{pmatrix}\right)}$$

固有値，固有空間を用いて $f(x)$ を作図する．