線形数学II

2008. 1. 21.

問　固有値，固有空間をもとめよ

$$A = \begin{pmatrix} -4 & -10 & -8 \\ 5 & 8 & 5 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

答　固有値をもとめる.

$$|\lambda E_3 - A| = \begin{vmatrix} \lambda+4 & 10 & 8 \\ -5 & \lambda-8 & -5 \\ 3 & 0 & \lambda-1 \end{vmatrix}$$

$$\underset{\boxed{3}+\boxed{1}\times(-1)}{=} \begin{vmatrix} \lambda+4 & 10 & \overset{=-(\lambda-4)}{-\lambda+4} \\ -5 & \lambda-8 & 0 \\ 3 & 0 & \lambda-4 \end{vmatrix}$$

$$\underset{\boxed{3}\text{の線形性}}{=} (\lambda-4) \begin{vmatrix} \lambda+4 & 10 & -1 \\ -5 & \lambda-8 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\underset{①+③}{=} (\lambda-4) \begin{vmatrix} \lambda+7 & 10 & 0 \\ -5 & \lambda-8 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\underset{\text{第3列で展開}}{=} (\lambda-4)\{\underbrace{(\lambda+7)(\lambda-8)+50}_{\lambda^2-\lambda-6\,=\,(\lambda+2)(\lambda-3)}\}$$

$$= (\lambda+2)(\lambda-3)(\lambda-4) = 0$$

$\therefore\ \lambda = -2,\ 3,\ 4$　（固有値）

固有空間をもとめる.

- $\lambda = -2$ のとき.

$$\begin{pmatrix} 2 & 10 & 8 \\ -5 & -10 & -5 \\ 3 & 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$ を考える.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 10 & 8 & 0 \\ -5 & -10 & -5 & 0 \\ 3 & 0 & -3 & 0 \end{array}\right) \to \to \cdots\cdots \to \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & \end{array} \\ \left(\begin{array}{cc|c|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \end{array}$$

$$\therefore \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ -t \\ t \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (t \neq 0)$$ ：固有ベクトル

よって

固有空間 $V(-2) = V\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

- $\lambda = 3$ のとき.

$$\begin{pmatrix} 7 & 10 & 8 \\ -5 & -5 & -5 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$ を考える.

$$\left(\begin{array}{ccc:c} 7 & 10 & 8 & 0 \\ -5 & -5 & -5 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right) \to \to \cdots\cdots \to \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \end{array} \\ \left(\begin{array}{cc|c:c} 1 & 0 & 2/3 & 0 \\ 0 & 1 & 1/3 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \end{array}$$

$$\therefore \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-2/3)\cdot t \\ (-1/3)\cdot t \\ t \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} -2/3 \\ -1/3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (t \neq 0)$$ ：固有ベクトル

よって $V(3) = V\left(\begin{pmatrix} -2/3 \\ -1/3 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$

- $\lambda = 4$ のとき.

$$\begin{pmatrix} 8 & 10 & 8 \\ -5 & -4 & -5 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$ を考える

$$\left(\begin{array}{ccc:c} 8 & 10 & 8 & 0 \\ -5 & -4 & -5 & 0 \\ 3 & 0 & 3 & 0 \end{array}\right) \to \to \cdots\cdots \to \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \end{array} \\ \left(\begin{array}{cc|c:c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \end{array}$$

$$\therefore \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -t \\ 0 \\ t \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (t \neq 0)$$ ：固有ベクトル

よって $V(4) = V\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.