線形数学 II 演習問題
2008年2月4日 (月)

1. $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$ の長さ（大きさ）$|\boldsymbol{a}|$ を求めよ．

2. $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ を正規化せよ．

3. $\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ のなす角 θ に対して $\cos\theta$ を求めよ．

4. $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ の直線 $\ell = V(\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix})$ 上の正射影を求めよ．

5. $\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} a \\ a+b \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ について，$|\mathbf{x}_1| = 1$ で，$\mathbf{x}_1$ と $\mathbf{x}_2$ は直交している．a, b を求めよ．

6. $\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} a \\ 1 \\ b \end{pmatrix}$ について，$\boldsymbol{a}_1$ と $\boldsymbol{a}_2$ は直交し，$|\boldsymbol{a}_2| = \sqrt{3}$, $a > 0$ である．a, b を求めよ．

7. $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ の平面 $V_1 = V(\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix})$ 上への正射影を求めよ．

8. $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$ の平面 $x - y + 4z = 0$ 上の正射影を求めよ．

9. 正方行列 $A = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ について，(1) A の固有値を計算せよ． (2) 固有値に対する固有空間を求めよ． (3) A を対角化せよ． (4) A^k $(k = 1, 2, \ldots)$ を求めよ． (5) $\lim_{k\to\infty} A^k$ を計算せよ．

10. $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ を用いて線形写像 $f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ を定める．(x, y) 平面に $\mathbf{x}$ を勝手に与えて $f(\mathbf{x})$ を図示せよ．

11. 次の行列の固有値，固有空間を求めよ．$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -3 \\ 2 & 5 & -8 \\ 2 & 3 & -6 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 4 & -3 & -2 \\ 4 & -1 & -4 \end{pmatrix}$

12. 次の行列は対角化可能であるか？ $A = \begin{pmatrix} \frac{8}{10} & \frac{1}{10} & \frac{1}{10} \\ \frac{2}{10} & \frac{8}{10} & \frac{1}{10} \\ 0 & \frac{1}{10} & \frac{8}{10} \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} \frac{17}{20} & \frac{1}{8} & 0 \\ \frac{1}{10} & \frac{13}{16} & 0 \\ \frac{1}{20} & \frac{1}{16} & 1 \end{pmatrix}$

13. $A = \begin{pmatrix} 8 & -9 & -15 \\ 3 & -4 & -9 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ について，(1) A を対角化せよ． (2) A^k $(k = 1, 2, \ldots)$ を求めよ．

1. $|a|^2 = 4^2 + (-3)^2 + 2^2 = 16 + 9 + 4 = 29$

$\therefore\ |a| = \sqrt{29}$.

2. $|a| = \sqrt{(-6)^2 + 2^2 + 5^2} = \sqrt{36 + 4 + 25} = \sqrt{65}$

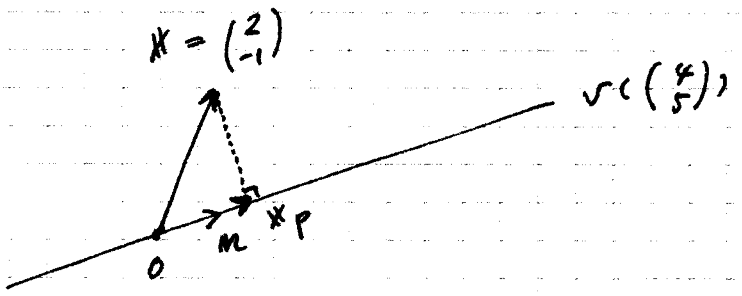
$\therefore$ aの正規化 $\dfrac{1}{|a|}a = \dfrac{1}{\sqrt{65}}\begin{pmatrix}-6\\2\\5\end{pmatrix}$.

3. $$\cos\theta = \frac{(a_1, a_2)}{|a_1|\cdot|a_2|} = \frac{1\cdot 1 + 0\cdot 2 + (-3)\cdot 5}{\sqrt{1+0+9}\,\sqrt{1+4+25}}$$

$$= \frac{-14}{\sqrt{10}\,\sqrt{30}} = \frac{-14}{10\sqrt{3}}$$

$$= -\frac{7}{5\sqrt{3}}.$$

4.



$\begin{pmatrix}4\\5\end{pmatrix}$の正規化を$m$とすると、 $m = \dfrac{1}{\sqrt{16+25}}\begin{pmatrix}4\\5\end{pmatrix} = \dfrac{1}{\sqrt{41}}\begin{pmatrix}4\\5\end{pmatrix}$.

xのl上の正射影をx_pとすると、

$$x_p = (x, m)\,m = \left(\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{41}}\begin{pmatrix}4\\5\end{pmatrix}\right)\frac{1}{\sqrt{41}}\begin{pmatrix}4\\5\end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{41}(8-5)\begin{pmatrix}4\\5\end{pmatrix} = \frac{3}{41}\begin{pmatrix}4\\5\end{pmatrix}.$$

5. $|\mathbb{x}_1| = 1$ より $a^2+(a+b)^2=1$

$\mathbb{x}_1 \perp \mathbb{x}_2$ より $2a + (a+b) = 0$.

$a+b=-2a$ より 最初の式に代入して, $5a^2=1$ $\therefore a = \pm\frac{1}{\sqrt{5}}$.
2式へ代入すると, $b=-3a=\mp\frac{3}{\sqrt{5}}$.

よって.

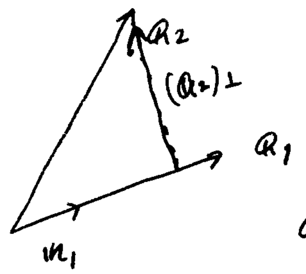
$$(a,b) = \left(\pm\frac{1}{\sqrt{5}}, \mp\frac{3}{\sqrt{5}}\right). \quad \text{複号同順}.$$

実際これらは上の条件式をみたす。

6. $\mathbb{a}_1 \perp \mathbb{a}_2$ より $(\mathbb{a}_1, \mathbb{a}_2) = a+1-b=0$.
$|\mathbb{a}_2| = \sqrt{3}$ より $a^2+1+b^2=3$. この2式を解いて,

$$a = \frac{-1\pm\sqrt{3}}{2}, \quad b = \frac{1\pm\sqrt{3}}{2} \quad (\text{複号同順})$$

7. まず, V_1 の正規直交基底を求める.



$\mathbb{a}_1$ の正規化を $\mathbb{n}_1$ とすると

$$\mathbb{n}_1 = \frac{1}{\sqrt{1+9}}\begin{pmatrix}-1\\3\\0\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix}-1\\3\\0\end{pmatrix}.$$

$\mathbb{a}_2$ の $\mathbb{n}_1$ 方向の正射影を $(\mathbb{a}_2)_p$ とすると,

$$(\mathbb{a}_2)_p = (\mathbb{a}_2, \mathbb{n}_1)\mathbb{n}_1 = \left(\begin{pmatrix}-2\\-4\\1\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix}-1\\3\\0\end{pmatrix}\right)\frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix}-1\\3\\0\end{pmatrix}.$$

$$= \begin{pmatrix}1\\-3\\0\end{pmatrix}.$$

$\mathbb{a}_2$ の $(\mathbb{a}_2)_p$ に対する差を $(\mathbb{a}_2)_\perp$ とすると

$$(\mathbb{a}_2)_\perp = \mathbb{a}_2 - (\mathbb{a}_2)_p = \begin{pmatrix}-3\\-1\\1\end{pmatrix}.$$

$(\mathbb{a}_2)_\perp$ の正規化を $\mathbb{n}_2$ とすると

$$\mathbb{n}_2 = \frac{1}{\sqrt{9+1+1}}\begin{pmatrix}-3\\-1\\1\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{11}}\begin{pmatrix}-3\\-1\\1\end{pmatrix}.$$

以上から

$$V_1 = V\Big(\underbrace{\frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix}-1\\3\\0\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{11}}\begin{pmatrix}-3\\-1\\1\end{pmatrix}}_{\text{正規直交基底}}\Big)$$

これより $\mathbb{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ の V_1 上への正射影 $\mathbb{x}_p$ は

$$\mathbb{x}_p = (\mathbb{x}, \mathbb{n}_1)\mathbb{n}_1 + (\mathbb{x}, \mathbb{n}_2)\mathbb{n}_2$$

$$= \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{11}}\begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \frac{1}{\sqrt{11}}\begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \underline{\frac{1}{55}\begin{pmatrix} 64 \\ 58 \\ -25 \end{pmatrix}}.$$

8. 平面 $V : x - y + 4z = 0$ を基底を用いて表すと，

$y = t$，$z = s$ とおいて，このとき $x = t - 4s$．

$$\therefore \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t - 4s \\ t \\ s \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$\therefore V = V\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

以下は問7．と同じ手順に従う。V の正規直交基底は

$$V = V\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

よって $\mathbb{x}$ の正射影 $\mathbb{x}_p$ は

$$\mathbb{x}_p = (\mathbb{x}, \mathbb{n}_1)\mathbb{n}_1 + (\mathbb{x}, \mathbb{n}_2)\mathbb{n}_2$$

$$= \underline{\frac{1}{18}\begin{pmatrix} 13 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}}.$$

9. (1) 固有方程式 $|\lambda E_2 - A| = \begin{vmatrix} \lambda - \frac{2}{3} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{3} & \lambda - \frac{1}{2} \end{vmatrix}$

$$= \left(\lambda - \frac{2}{3}\right)\left(\lambda - \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{6}.$$

$$= (\lambda - 1)\left(\lambda - \frac{1}{6}\right) = 0$$

$$\therefore \underline{\lambda = 1, \frac{1}{6}} \ (\text{固有値}).$$

(2) $\lambda=1$ の 固有空間 $V(1)$ を求める. 連立方程式

$$\left(\begin{array}{cc|c} \frac{1}{3} & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 0 \end{array}\right) \to \cdots\cdots \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -\frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

$$\therefore \quad V(1) = V\left(\begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ 1 \end{pmatrix}\right) = V\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}\right).$$

$\lambda=\frac{1}{6}$ の 固有空間 $V(\frac{1}{6})$ を求める.

$$\left(\begin{array}{cc|c} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \end{array}\right) \to \cdots \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

$$\therefore \quad V\left(\tfrac{1}{6}\right) = V\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

(3) $P = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ とおくとき $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$.

(4) (3) より

$$A^k = P\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{6} \end{pmatrix}^k P^{-1} = P\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (\frac{1}{6})^k \end{pmatrix} P^{-1}.$$

$$P^{-1} = \frac{1}{3+2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$\therefore A^k = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (\frac{1}{6})^k \end{pmatrix}\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & -(\frac{1}{6})^k \\ 2 & (\frac{1}{6})^k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3+2(\frac{1}{6})^k & 3-3(\frac{1}{6})^k \\ 2-2(\frac{1}{6})^k & 2+3(\frac{1}{6})^k \end{pmatrix}.$$

(5) (4) において $k \to \infty$ とすると $\left(\frac{1}{6}\right)^k \to 0$.

$$\text{よって} \quad A^k \longrightarrow \underline{\begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix}}, \quad k \to \infty.$$

10. A の固有値を求める.

$$|\lambda E_2 - A| = \begin{vmatrix} \lambda+1 & -3 \\ -2 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + \lambda - 6 = (\lambda+3)(\lambda-2) = 0$$

∴ $\lambda = -3, 2$ (固有値)

それぞれの固有空間を求める.

$\lambda = -3$ について.

$$\left(\begin{array}{cc|c} -3+1 & -3 & 0 \\ -2 & -3 & 0 \end{array}\right) \to \to \cdots \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

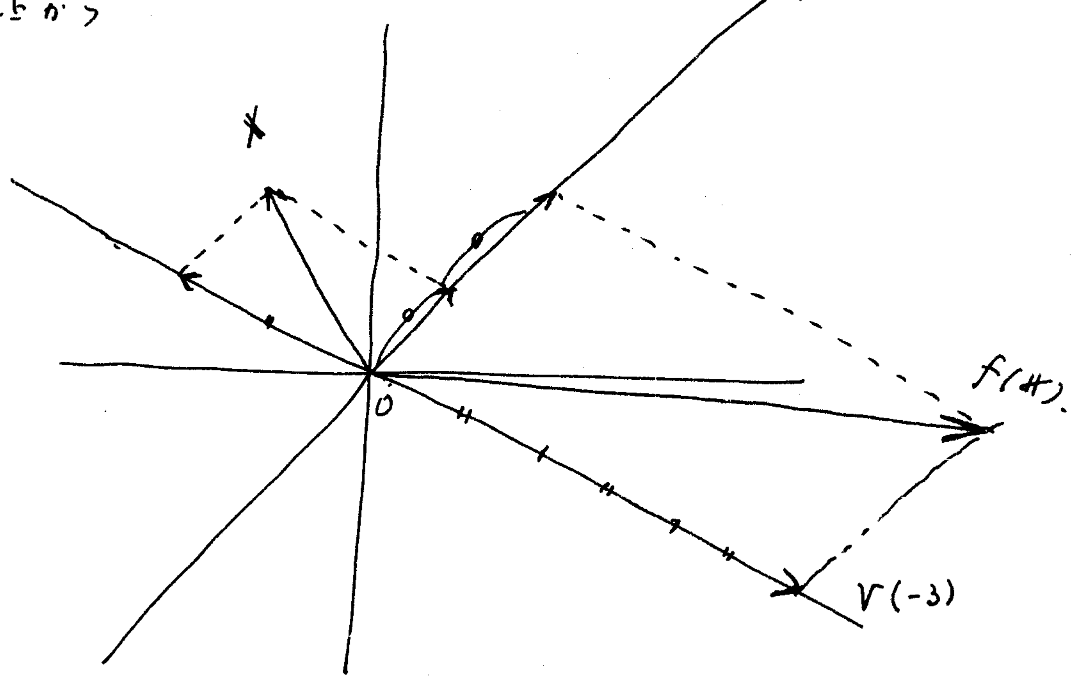
$$\therefore \quad V(-3) = V\left(\begin{pmatrix} -3/2 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \underline{V\left(\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}\right)}$$

$\lambda = 2$ について.

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2+1 & -3 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \end{array}\right) \to \to \cdots \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\therefore \quad V(2) = \underline{V\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)}$$

以上から



11. A について.

$$|\lambda E_3 - A| = \begin{vmatrix} \lambda+1 & -3 & 3 \\ -2 & \lambda-5 & 8 \\ -2 & -3 & \lambda+6 \end{vmatrix}$$

$$\overset{\boxed{3}+\boxed{2}\times 1}{=} \begin{vmatrix} \lambda+1 & -3 & 0 \\ -2 & \lambda-5 & \lambda+3 \\ -2 & -3 & \lambda+3 \end{vmatrix}$$

$$\overset{\boxed{3}\text{の線形性}}{=} (\lambda+3) \begin{vmatrix} \lambda+1 & -3 & 0 \\ -2 & \lambda-5 & 1 \\ -2 & -3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\overset{②+③\times(-1)}{=} (\lambda+3) \begin{vmatrix} \lambda+1 & -3 & 0 \\ 0 & \lambda-2 & 0 \\ -2 & -3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\overset{\boxed{3}\text{で展開}}{=} (\lambda+3)\cdot 1\cdot(-1)^{3+3} \begin{vmatrix} \lambda+1 & -3 \\ 0 & \lambda-2 \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda+3)(\lambda+1)(\lambda-2) = 0 \quad \therefore \lambda = -3,\ -1,\ 2 \ (\text{固有値}).$$

それぞれの固有空間を求める.

$\lambda = -3$

$$\left(\begin{array}{ccc:c} -3+1 & -3 & 3 & 0 \\ -2 & -3-5 & 8 & 0 \\ -2 & -3 & -3+6 & 0 \end{array}\right) \to \to \cdots \to \left(\begin{array}{cc|c:c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\therefore \quad V(-3) = \underline{V\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)}$$

$\lambda = -1$.

$$\left(\begin{array}{ccc:c} -1+1 & -3 & 3 & 0 \\ -2 & -1-5 & 8 & 0 \\ -2 & -3 & 5 & 0 \end{array}\right) \to \cdots \to \left(\begin{array}{cc|c:c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\therefore \quad V(-1) = \underline{V\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)}$$

$\lambda = 2$ のとき.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2+1 & -3 & 3 & 0 \\ -2 & 2-5 & 8 & 0 \\ -2 & -3 & 2+6 & 0 \end{array}\right) \to \to \cdots \to \left(\begin{array}{cc|c|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\therefore \quad V(2) = V\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

<u>Bについて</u>

$$|\lambda E_3 - B| = \begin{vmatrix} \lambda-2 & 1 & 2 \\ -4 & \lambda+3 & 2 \\ -4 & 1 & \lambda+4 \end{vmatrix}$$

$$\overset{②+③\times(-1)}{=} \begin{vmatrix} \lambda-2 & 1 & 2 \\ 0 & \lambda+2 & -(\lambda+2) \\ -4 & 1 & \lambda+4 \end{vmatrix}$$

$$\overset{②の線形性}{=} (\lambda+2)\begin{vmatrix} \lambda-2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ -4 & 1 & \lambda+4 \end{vmatrix}$$

$$\overset{\boxed{3}+\boxed{2}\times 1}{=} (\lambda+2)\begin{vmatrix} \lambda-2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ -4 & 1 & \lambda+5 \end{vmatrix}$$

$$\overset{②で展開.}{=} (\lambda+2)\cdot 1\cdot(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} \lambda-2 & 3 \\ -4 & \lambda+5 \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda+2)\left\{\underbrace{(\lambda-2)(\lambda+5)+12}_{\lambda^2+3\lambda+2 = (\lambda+1)(\lambda+2)}\right\}$$

$$= (\lambda+1)(\lambda+2)^2 = 0$$

$$\therefore \quad \lambda = -2,\ -1 \quad (固有値)$$

$\lambda = -2$.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -2-2 & 1 & 2 & 0 \\ -4 & 1 & 2 & 0 \\ -4 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right) \to \to \cdots \to \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x & y & z \end{array} \\ \left(\begin{array}{c|cc|c} 1 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \end{array}$$

$$\therefore \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} +\frac{1}{4}t + \frac{1}{2}s \\ t \\ s \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$\therefore V(-2) = V\left(\begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \underline{V\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}\right)}$$

$\lambda = -1$ のとき,

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1-2 & 1 & 2 & 0 \\ -4 & 2 & 2 & 0 \\ -4 & 1 & 3 & 0 \end{array}\right) \to \to \cdots \to \left(\begin{array}{cc|c|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\therefore V(-1) = \underline{V\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)}.$$

<u>12.</u>　<u>A について.</u>

$$|\lambda E_3 - A| = \begin{vmatrix} \lambda - \frac{8}{10} & -\frac{1}{10} & -\frac{1}{10} \\ -\frac{2}{10} & \lambda - \frac{8}{10} & -\frac{1}{10} \\ 0 & -\frac{1}{10} & \lambda - \frac{8}{10} \end{vmatrix}$$

$$\overset{②+①\times 1}{=} \begin{vmatrix} \lambda - \frac{8}{10} & -\frac{1}{10} & -\frac{1}{10} \\ \lambda - 1 & \lambda - \frac{9}{10} & -\frac{2}{10} \\ 0 & -\frac{1}{10} & \lambda - \frac{8}{10} \end{vmatrix}$$

$$\overset{②+③\times 1}{=} \begin{vmatrix} \lambda - \frac{8}{10} & -\frac{1}{10} & -\frac{1}{10} \\ \lambda - 1 & \lambda - 1 & \lambda - 1 \\ 0 & -\frac{1}{10} & \lambda - \frac{8}{10} \end{vmatrix}$$

$$\overset{②の線形性}{=} (\lambda - 1)\begin{vmatrix} \lambda - \frac{8}{10} & -\frac{1}{10} & -\frac{1}{10} \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{10} & \lambda - \frac{8}{10} \end{vmatrix}$$

$$①+③\times -\left(\lambda-\tfrac{8}{10}\right) = (\lambda-1)\begin{vmatrix} 0 & -\frac{1}{10}-\left(\lambda-\frac{8}{10}\right) & -\frac{1}{10}-\left(\lambda-\frac{8}{10}\right) \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{10} & \lambda-\frac{8}{10} \end{vmatrix}$$

列①で展開.

$$= (\lambda-1)\cdot 1\cdot(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} -\lambda+\frac{7}{10} & -\lambda+\frac{7}{10} \\ -\frac{1}{10} & \lambda-\frac{8}{10} \end{vmatrix}$$

①で線形性

$$= -(\lambda-1)\left(-\lambda+\tfrac{7}{10}\right)\underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -\frac{1}{10} & \lambda-\frac{8}{10} \end{vmatrix}}_{\left(\lambda-\frac{8}{10}\right)+\frac{1}{10} = \lambda-\frac{7}{10}.}$$

$$= (\lambda-1)\left(\lambda-\tfrac{7}{10}\right)^2 = 0.$$

$\therefore\ \lambda = 1,\ \frac{7}{10}$ （固有値2つ）. → まだ可能か否かわからない.

固有空間の次元を調べる.

$\lambda=1$ のとき,

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1-\frac{8}{10} & -\frac{1}{10} & -\frac{1}{10} & 0 \\ -\frac{2}{10} & 1-\frac{8}{10} & -\frac{1}{10} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{10} & 1-\frac{8}{10} & 0 \end{array}\right) \to\to\cdots\to \left(\begin{array}{cc|c|c} 1 & 0 & -3/2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\therefore\ V(1) = V\left(\begin{pmatrix} 3/2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = V\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}\right) \ ;\ 1次元.$$

$\lambda=\frac{7}{10}$ のとき,

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \frac{7}{10}-\frac{8}{10} & -\frac{1}{10} & -\frac{1}{10} & 0 \\ -\frac{2}{10} & \frac{7}{10}-\frac{8}{10} & -\frac{1}{10} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{10} & \frac{7}{10}-\frac{8}{10} & 0 \end{array}\right) \to\to\cdots\to \left(\begin{array}{cc|c|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\therefore\ V\left(\tfrac{7}{10}\right) = V\left(\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \ ;\ 1次元$$

よって，

$$\dim V(1) + \dim V\left(\frac{7}{10}\right) = 1 + 1 = 2 < 3.$$

これより，Aは対角化可能でない．

B について．

$$|\lambda E_3 - B| = \begin{vmatrix} \lambda - \frac{17}{20} & -\frac{1}{8} & 0 \\ -\frac{1}{10} & \lambda - \frac{13}{16} & 0 \\ -\frac{1}{20} & -\frac{1}{16} & \lambda - 1 \end{vmatrix}$$

$$\overset{③で展開}{=} (\lambda - 1) \begin{vmatrix} \lambda - \frac{17}{20} & -\frac{1}{8} \\ -\frac{1}{10} & \lambda - \frac{13}{16} \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda - 1)\left\{\left(\lambda - \frac{17}{20}\right)\left(\lambda - \frac{13}{16}\right) - \frac{1}{80}\right\}$$

$$= \frac{1}{80}(\lambda - 1)\left\{(80\lambda - 17 \times 4)\left(\lambda - \frac{13}{16}\right) - 1\right\}$$

$$\cancel{= \frac{1}{80} \cdot \frac{1}{80}(\lambda - 1)\{(80\lambda - 68)(80\lambda - 13 \cdot 5) - 80\}}$$

$$= \frac{1}{80} \cdot \frac{1}{16}(\lambda - 1)\{\underbrace{(80\lambda - 68)(16\lambda - 13)}_{4(320\lambda^2 - 532\lambda + 217)} - 16\}$$

判別式を調べると，

$$D = 532^2 - 4 \cdot 320 \cdot 217 = 5264 > 0.$$

$\Rightarrow$ 2実解をもつ．

以上から，固有方程式は3つの異なる実数解をもつ．

$\hookrightarrow$ 固有値は3つ．

よって，Bは対角化可能である．

13. (1). 固有値を求める.

$$|\lambda E_3 - A| = \begin{vmatrix} \lambda-8 & 9 & 15 \\ -3 & \lambda+4 & 9 \\ -1 & 1 & \lambda \end{vmatrix}$$

$$\overset{\boxed{1}+\boxed{2}\times 1}{=} \begin{vmatrix} \lambda+1 & 9 & 15 \\ \lambda+1 & \lambda+4 & 9 \\ 0 & 1 & \lambda \end{vmatrix}$$

$$\overset{\boxed{1}\text{で線形性}}{=} (\lambda+1) \begin{vmatrix} 1 & 9 & 15 \\ 1 & \lambda+4 & 9 \\ 0 & 1 & \lambda \end{vmatrix}$$

$$\overset{②+①\times(-1)}{=} (\lambda+1) \begin{vmatrix} 1 & 9 & 15 \\ 0 & \lambda-5 & -6 \\ 0 & 1 & \lambda \end{vmatrix}$$

$$\overset{\boxed{1}\text{で展開}}{=} (\lambda+1) \underbrace{\begin{vmatrix} \lambda-5 & -6 \\ 1 & \lambda \end{vmatrix}}_{(\lambda-5)\lambda+6 \,=\, \lambda^2-5\lambda+6 \,=\, (\lambda-2)(\lambda-3)}$$

$$= (\lambda+1)(\lambda-2)(\lambda-3) = 0$$

$\therefore \lambda = -1,\ 2,\ 3$ (固有値) $\longrightarrow$ 対角化可能.

固有空間を求める.

$\lambda = -1$.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1-8 & 9 & 15 & 0 \\ -3 & 3 & 9 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right) \to \to \cdots \xrightarrow[\boxed{2}\leftrightarrow\boxed{3}]{} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x & z & y \end{array} \\ \left(\begin{array}{cc|c|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \end{array}.$$

$$\therefore V(-1) = V\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right).$$

$\lambda = 2$,

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2-8 & 9 & 15 & 0 \\ -3 & 2+4 & 9 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right) \to \to \cdots \left(\begin{array}{cc|c|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$V(2) = V\left(\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}}\right).$$

$\lambda = 3$,

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3-8 & 9 & 15 & 0 \\ -3 & 3+4 & 9 & 0 \\ -1 & 1 & 3 & 0 \end{array}\right) \to \to \cdots\cdots \to \left(\begin{array}{cc|c|c} 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$V(3) = V\left(\underbrace{\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}\right).$$

以上から，

$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ とおくと P は正則であって，

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

(2) (1)より $k = 1, 2, 3, \cdots$ に対して，

$$A^k = P \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}^k P^{-1}$$

$$= P \begin{pmatrix} (-1)^k & 0 & 0 \\ 0 & 2^k & 0 \\ 0 & 0 & 3^k \end{pmatrix} P^{-1}.$$

P^{-1} をおめる.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{②+①\times(-1)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{②\leftrightarrow③} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -3 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[③+②\times 2]{①+②\times(-1)}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{③\times(-1)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[②+③\times(-1)]{①+③\times(-2)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -2 \end{array}\right). \quad \therefore P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

$$\therefore A^k = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-1)^k & 0 & 0 \\ 0 & 2^k & 0 \\ 0 & 0 & 3^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (-1)^k & 2^k & 3\cdot 3^k \\ (-1)^k & -2^k & 0 \\ 0 & 2^k & 3^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -(-1)^k - 2^k + 3\cdot 3^k & 2(-1)^k + 2^k - 3\cdot 3^k & 3(-1)^k + 3\cdot 2^k - 6\cdot 3^k \\ -(-1)^k + 2^k & 2(-1)^k - 2^k & 3(-1)^k - 3\cdot 2^k \\ -2^k + 3^k & 2^k - 3^k & 3\cdot 2^k - 2\cdot 3^k \end{pmatrix}$$

//

K.U.