線形代数 I

2007 年 4 月 20 日

[問題]：行列の積に関する性質 $D(A+B) = DA + DB$ を導け．

[解答]：$D = (d_{ij})$ を (m, n) 行列．$A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$ を (n, ℓ) 行列とするとき，

$$(D(A+B))_{ij} = \sum_{k=1}^{n} d_{ik}(a_{kj} + b_{kj}) = \sum_{k=1}^{n} d_{ik}a_{kj} + \sum_{k=1}^{n} d_{ik}b_{kj} = (DA)_{ij} + (DB)_{ij}$$

[問題]：２次正方行列 A, B で $AB = BA$ の例を挙げよ，$AB \neq BA$ の例を挙げよ．

[解答]：$B = E_2$（単位行列）とおくと，常に $AE_2 = E_2A$. また，

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

は $AB \neq BA$.

[問題]：n 次正方 B, n 次単位行列 E_n に対して $BE_n = B$ を示せ．

[解答]：$B = (b_{ij})$, $E_n = (e_{ij})$ とするとき

$$(BE_n)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} b_{ik}e_{kj}$$

ここで $k \neq j$ ならば $e_{kj} = 0$ だから，和は $k = j$ のみ考えればよい．ゆえに $e_{jj} = 1$ だから

$$(BE_n)_{ij} = b_{ij}e_{jj} = b_{ij}$$

これは $BE_n = B$ を与える．

K.U.