線形代数 I

2007 年 4 月 27 日

[問題]：n 次正方行列について，A に対して $AX = XA = E_n$ をみたす X が存在するとき，X はただひとつであることを示せ．

[解答]：Y を条件をみたすもうひとつの正方行列とするならば，結合則により

$$Y = YE_n = Y(AX) = (YA)X = E_nX = X.$$

これは矛盾である．

[問題]：A が正則のとき，$(A^{-1})^{-1} = A$ を示せ．

[解答]：$AX = XA = E_n$ より，X から見ると A は $A = X^{-1}$ と見なせる．$X = A^{-1}$ より $A = X^{-1} = (A^{-1})^{-1}$.

[問題]：$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -7 & 4 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ のとき，B は A の逆行列であることを示せ．

[解答]：直接の計算から $AB = BA = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

[問題]：正則行列の列 A_j $(j = 1, 2, 3, \ldots, k)$ に対して $(A_1A_2\cdots A_k)^{-1}$ を求めよ．

[解答]：結論は

$$(A_1A_2\cdots A_k)^{-1} = A_k^{-1}A_{k-1}^{-1}\cdots A_2^{-1}A_1^{-1}.$$

数学的帰納法で示す．$k = 2$ は講義で示した．k で成立すると仮定する．このとき，$k+1$ では

$$(A_1A_2\cdots A_kA_{k+1})^{-1} = (XA_{k+1})^{-1}.$$

ここで $X = A_1A_2\cdots A_k$ とおいた．$k = 2$ の結果を適用して

$$(XA_{k+1})^{-1} = A_{k+1}^{-1}X^{-1}.$$

さらに k のときの仮定を用いて

$$X^{-1} = A_k^{-1}A_{k-1}^{-1}\cdots A_2^{-1}A_1^{-1}.$$

したがって

$$(A_1A_2\cdots A_kA_{k+1})^{-1} = A_{k+1}^{-1}A_k^{-1}A_{k-1}^{-1}\cdots A_2^{-1}A_1^{-1}.$$

$k+1$ の場合に成立する．よって示せた．

K.U.