0.1 連立方程式の解法

ここでは行列の基本変形の応用として，連立方程式の解法を学ぶ.

定理 0.1 (m,n) 行列 A は行基本変形と列交換により，次の４つの行列（**標準形**）に帰着される.

$$\begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix} \quad \text{正方行列の場合} \tag{0.1}$$

$$\begin{pmatrix} E_r & * \\ O & O \end{pmatrix} \tag{0.2}$$

$$\begin{pmatrix} E_r & * \end{pmatrix} \tag{0.3}$$

$$\begin{pmatrix} E_r \\ O \end{pmatrix} \tag{0.4}$$

ここでは，連立一次方程式の解法を考える．典型的な例として，

$$\begin{cases} x + 2y + 3z & = 1 \\ 4x + 5y + 6z & = -1 \\ 7x + 8y + 9z & = -3 \end{cases} \quad 3\,\text{元の方程式} \tag{0.5}$$

一般には，未知数 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ (n 個) について，

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n & = b_1 \\ a_{21}x_1 + \cdots + a_{2n}x_n & = b_2 \\ \vdots & \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n & = b_m \end{cases} \quad n\,\text{元の方程式} \tag{0.6}$$

を考える.

方程式 (0.5) に対して

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \quad \text{係数行列}$$

$$(A\ \boldsymbol{b}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & 6 & -1 \\ 7 & 8 & 9 & -3 \end{pmatrix} \quad \text{拡大係数行列}$$

と呼ぶ．A の第一列は x の係数に対応する．一般の方程式 (0.6) に対しても同様に定義される．

問題 0.1 次の拡大係数行列から決まる連立方程式を作れ．

$$(A\ \boldsymbol{b}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

0.2　基本変形と解集合の関係

連立方程式を解くことは行列の行基本変形と密接な関係がある．まずは簡単な例でこのことを説明する．

例 0.1 次の連立一次方程式を考える．

$$x + y = 1$$
$$2x - 3y = 1$$

通常，この方程式を解くにはある未知数を消去することにより行う（**消去法**）．つまり，第一式を２倍：$2x + 2y = 2$．これから第２式を辺々引くと，$5y = 1$．ゆえに $y = 1/5$．これを第一式に代入して $x = 4/5$．この解法において,「第一式を２倍」,「辺々引く」という操作がそれぞれ，**第一行を２倍**，**はきだし**という行列の基本変形に対応する．

一般に次のことが成立する．

定理 0.2 (解集合不変) 拡大係数行列 $(A\ \boldsymbol{b})$ にある行基本変形を行って $(A_1\ \boldsymbol{b}_1)$ とするとき，$(A\ \boldsymbol{b})$ で定まる連立方程式と $(A_1\ \boldsymbol{b}_1)$ で定まる連立方程式は同値である．つまり，解集合は一致する．

さらに，係数行列の**列を交換する**場合には，交換に対応する未知数を交換して拡大係数行列を方程式に読み替えれば**解集合はやはり不変**である．

したがって，次の手順で方程式を解く：

拡大係数行列の**係数行列のパートを標準形にせよ**

$$(A\ \boldsymbol{b}) \xrightarrow{\text{行変形または } A \text{ の列交換}} (A_1\ \boldsymbol{b}_1) \xrightarrow{\text{行変形または } A_1 \text{ の列交換}} (A_2\ \boldsymbol{b}_2) \longrightarrow \cdots \longrightarrow (\text{標準形}\ \tilde{\boldsymbol{b}})$$

標準形は先に述べたように４つのタイプしかない．したがって，４つのタイプについて，拡大係数行列 $(\text{標準形}\ \tilde{\boldsymbol{b}})$ に対する方程式の解表示ができればすべての連立一次方程式を解くことができる．

問題 0.2 次の連立方程式の係数行列を標準形にすることにより解を求めよ．

$$\begin{cases} x + 2z = 2 \\ 4x - y + 5z = 1 \\ -2x + y + 3z = 4 \end{cases}$$