線形代数 I

2007 年 6 月 15 日

はじめに，基本変形の仕方によって解表示は異なるので，ここに示した解答はその一例である（ただし，表示のタイプは同じでなければならない）．

[問]：次の連立方程式を解け．

(1)

$$\begin{cases} x+y-z &= -2 \\ 2x+3y-4z &= -9 \\ x+2y-3z &= -7 \end{cases}$$

(2)

$$\begin{cases} x+2y+3z &= 1 \\ 2x-2y+3z &= -1 \\ x-2y+5z &= 2 \end{cases}$$

(3)

$$\begin{cases} 2a+2b+3c &= 3 \\ a+b+c &= 1 \\ a+b+3c &= 3 \end{cases}$$

[答]：(1)

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(2) 解はただひとつ．検算により確かめよ．

(3) 拡大係数行列

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{① \leftrightarrow ②} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 3 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{第 1 列のはきだし}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{第 2 列と第 3 列の交換}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{第 2 列のはきだし}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{；係数行列は標準形}$$

よって

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

[問]：連立方程式

$$\begin{cases} 3x - 3y - z &= 1 \\ -2x + y + \beta z &= -1 \\ 2x + 5y - 3z &= \alpha \end{cases}$$

について，(i) 解がただひとつ (ii) 解が無数 (iii) 解なし をみたす (α, β) の領域を図示せよ．

[答]：拡大係数行列ははきだし法により

$$\begin{pmatrix} 3 & -3 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & \beta & -1 \\ 2 & 5 & -3 & \alpha \end{pmatrix} \to\to \cdots \to \begin{pmatrix} 1 & -2 & \beta - 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{3\beta-2}{-3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 7\beta - 7 & \alpha - 3 \end{pmatrix}$$

もし $7\beta - 7 \neq 0$, つまり $\beta \neq 1$ ならば係数行列は単位行列まで変形可能．これが (i) の条件.

もし $\beta = 1$ かつ $\alpha = 3$ ならば係数行列はタイプ 2 の標準形，4 分割タイプに変形されるから，これが (ii) の条件.

もし $\beta = 1$ かつ $\alpha \neq 3$ ならば解の存在条件をみたさないから，これが (iii) の条件.

K.U.