線形代数 I

2007 年 6 月 22 日

[問]：次の２つの連立方程式の解集合を比較せよ．

$$\begin{cases} x+2y+3z &= 0 \\ 4x+5y+6z &= 0 \\ 7x+8y+9z &= 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+2y+3z &= 1 \\ 4x+5y+6z &= -2 \\ 7x+8y+9z &= -5 \end{cases}$$

[答]：２番目の方程式の拡大係数行列について，行変形のみで，

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & 6 & -2 \\ 7 & 8 & 9 & -5 \end{pmatrix} \to\to \cdots \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

より一般解は

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

これは１番目の方程式の一般解

$$t \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

と２番目の方程式のある解

$$\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

の和になっている．実際，$\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ は代入することによって２番目の解であることがわかる．

[問]：$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ について，$ad - bc \neq 0$ のとき A^{-1} をはき出し法によって求めよ．

[答]：$ad - bc \neq 0$ より，$a = 0$ と $c = 0$ は同時に起こらない．そこで，$a \neq 0$ として考える．$a = 0$ の場合は ① $\leftrightarrow$ ② で始める．

$$\begin{pmatrix} a & b & 1 & 0 \\ c & d & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{①\times 1/a} \begin{pmatrix} 1 & b/a & 1/a & 0 \\ c & d & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{②+①\times c} \begin{pmatrix} 1 & b/a & 1/a & 0 \\ 0 & \frac{ad-bc}{a} & -c/a & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{②\times\frac{a}{ad-bc}} \begin{pmatrix} 1 & b/a & 1/a & 0 \\ 0 & 1 & \frac{-c}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc} \end{pmatrix} \xrightarrow{①+②\times(-b/a)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{a}+\frac{bc}{a(ad-bc)} & \frac{-b}{ad-bc} \\ 0 & 1 & \frac{-c}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{d}{ad-bc} & \frac{-b}{ad-bc} \\ 0 & 1 & \frac{-c}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc} \end{pmatrix} \qquad \therefore\ A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

[問]：３次正方行列 $A = (a_{ij})$ の行列式 $|A|$ を書け．

[答]：

$$\begin{aligned} |A| &= \mathrm{sign}\,(1,2,3)a_{11}a_{22}a_{33} + \mathrm{sign}\,(1,3,2)a_{11}a_{32}a_{23} \\ &\quad + \mathrm{sign}\,(2,1,3)a_{21}a_{12}a_{33} + \mathrm{sign}\,(2,3,1)a_{21}a_{32}a_{13} \\ &\quad + \mathrm{sign}\,(3,1,2)a_{31}a_{12}a_{23} + \mathrm{sign}\,(3,2,1)a_{31}a_{22}a_{13} \end{aligned}$$

符号を求めて，

$$\begin{aligned} |A| &= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{32}a_{23} \\ &\quad - a_{21}a_{12}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} \\ &\quad + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{31}a_{22}a_{13} \end{aligned}$$

K.U.