線形代数II

2007.10.5

問　$\mathbb{R}^n$ のベクトル列 $a_1, \cdots, a_r$ ($r \geq 1$) について，$r > n$ ならば常に一次従属であることを示せ．

答：　$c_1 a_1 + \cdots + c_r a_r = 0$ とおく．

拡大係数行列

$$(a_1, \cdots, a_r, 0)$$

$$= \left(\begin{array}{ccc|c} * & \cdots\cdots & * & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ * & \cdots\cdots & * & 0 \end{array}\right)$$

係数行列

「フル」より係数行列は横に長い（列が多い）ので必ずパラメータ付の解をもつ．よって一次従属．

問：$\mathbb{R}^n$ のベクトル列 $a_1, \cdots, a_n$ について，$|A| \neq 0$ ($A = (a_1, \cdots, a_n)$) ならば一次独立であることを示せ．

答：　$c_1 a_1 + \cdots + c_n a_n = 0$ とおく．

係数行列 $A = (a_1, \cdots, a_n)$ は n 次正方で，正則である．

よって基本変形により

$$A \to \to \cdots\cdots \to E_n \text{（単位行列）}$$

ゆえに

$$(A \,\vdots\, 0) \to \to \cdots\cdots \to (E_n \,\vdots\, 0)$$ ：解がただ1つ（自明解のみ）

$\Rightarrow$ 一次独立．