線形代数 II

2007. 10. 19

問　一般に $\mathbb{b}_1, \cdots \mathbb{b}_r \in V$，$V$ は線形部分空間であるとき，

$$V(\mathbb{b}_1, \cdots, \mathbb{b}_r) \subset V$$

を示せ．

答：　$V(\mathbb{b}_1, \cdots, \mathbb{b}_r)$ の元 $c_1\mathbb{b}_1 + \cdots + c_r\mathbb{b}_r$ を任意にとる．

今，$\mathbb{b}_1, \cdots, \mathbb{b}_r \in V$ より $c_1\mathbb{b}_1, \cdots, c_r\mathbb{b}_r \in V$ である．
線形性より

さらに線形性より

$$c_1\mathbb{b}_1 + \cdots + c_r\mathbb{b}_r \in V.$$

よって

$$V(\mathbb{b}_1, \cdots, \mathbb{b}_r) \subset V.$$

（余談）　集合 A，B について，A の任意の元 a が常に B に属するとき，$A \subset B$ とかく．

問　次の積空間を求めよ．

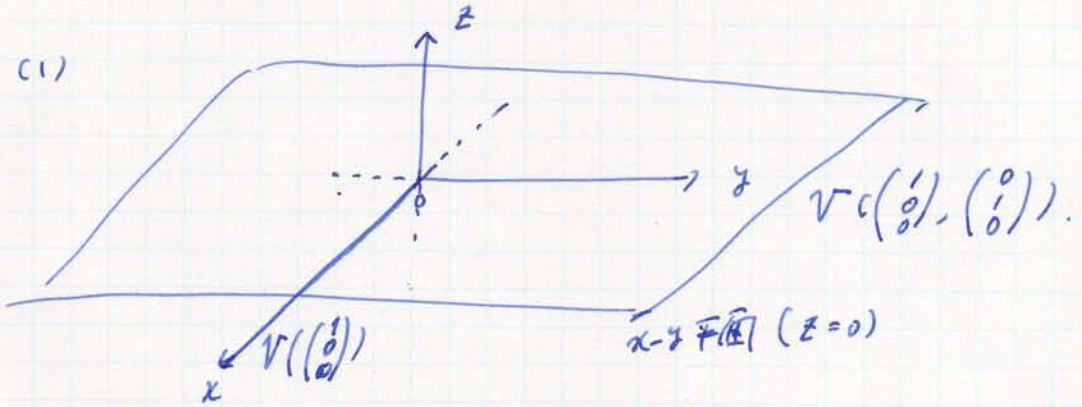
(1) $V\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right) \cap V\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right)$

(2) $V\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right) \cap V\left(\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right)$

(3) $V\left(\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}\right) \cap V\left(\begin{pmatrix}-3\\1\end{pmatrix}\right)$

答：　原点を始点として両方の空間に終点をもつ、そのようなベクトルの集まりを考えれば良い。

(1)



求める積空間は　$V\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right)$.

(2)

$$V\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right) \cap V\left(\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right) = V\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right)$$

問　積空間 $V_1 \cap V_2$ は線形性をもつことを示せ。
（V_1, V_2 がともに線形性をもつ場合に）

答：　$\mathbf{a}, \mathbf{b} \in V_1 \cap V_2$ から任意にとる。$\mathbf{a}, \mathbf{b} \in V_1$ で V_1 に線形性があるから

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} \in V_1$$

$$c\mathbf{a} \in V_1 \quad (c \in \mathbb{R}).$$

同様にして

$$\mathbf{a} + \mathbf{b}_1 \in V_2 \quad , \quad c\mathbf{a} \in V_2$$

ゆえに

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} \in V_1 \cap V_2 \quad , \quad c\mathbf{a} \in V_1 \cap V_2$$