線形代数 II

2007.10.26

問　$V_1 = V\left(\begin{pmatrix}-1\\0\\2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\4\\0\\1\end{pmatrix}\right)$ , $V_2 = V\left(\begin{pmatrix}1\\12\\4\\9\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\4\\1\\10\end{pmatrix}\right)$

に対して $V_1 + V_2$ (和空間) を求めよ.

答　$V_1 + V_2 = V\left(\begin{pmatrix}-1\\0\\2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\4\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\12\\4\\9\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\4\\1\\10\end{pmatrix}\right)$

行列 $\begin{pmatrix}-1 & 1 & 1 & 0\\0 & 4 & 12 & 4\\2 & 0 & 4 & 1\\3 & 1 & 9 & 10\end{pmatrix}$ のランクは 3 であるから,

$$V_1 + V_2 = V\Bigg(\underbrace{\begin{pmatrix}-1\\0\\2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\4\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\12\\4\\9\end{pmatrix}}_{\text{基底}}\Bigg) \quad , \text{3次元}$$

問　$V_1, V_2$ が部分空間のとき $V_1 + V_2$ も部分空間であることを示せ.

答　$\mathbb{x}_1 \in V_1 + V_2$, $\mathbb{x}_2$ とするとき　$\mathbb{x}_1 = \mathbb{a}_1 + \mathbb{a}_2$, $\mathbb{x}_2 = \mathbb{b}_1 + \mathbb{b}_2$　ただし, $\mathbb{a}_i, \mathbb{b}_i \in V_i$

このとき,

$$\mathbb{x}_1 + \mathbb{x}_2 = (\mathbb{a}_1 + \mathbb{a}_2) + (\mathbb{b}_1 + \mathbb{b}_2)$$

$$= \underbrace{(\mathbb{a}_1 + \mathbb{b}_1)}_{\in V_1} + \underbrace{(\mathbb{a}_2 + \mathbb{b}_2)}_{\in V_2} \in V_1 + V_2$$

$c \in \mathbb{R}$ に対して, 同様に $c\mathbb{x}_1 \in V_1 + V_2$ が示される.

よって, $V_1 + V_2$ は部分空間である.