線形代数II

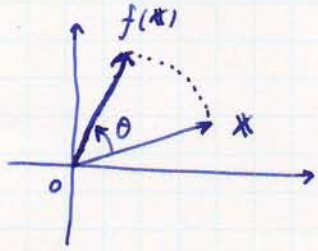
2007. 11. 2

問　$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ は $\mathbf{x}$ を原点に対称に写す。f の表現行列を求めよ。

答　$f\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}$,　$f\left(\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}$　であるから

$$f(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix}-1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix}\mathbf{x}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}.$$

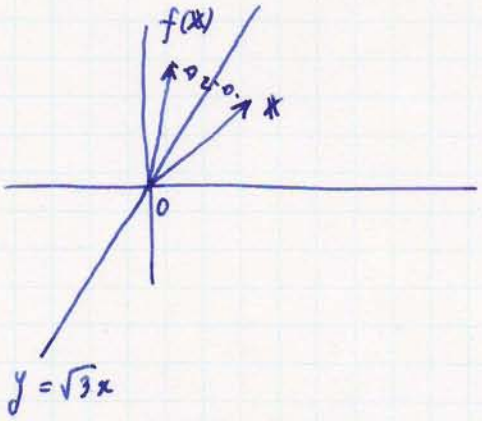
問　$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ は $\mathbf{x}$ を θ-回転させる



$f\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}\cos\theta\\\sin\theta\end{pmatrix}$,　$f\left(\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}-\sin\theta\\\cos\theta\end{pmatrix}$　であるから

$$f(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\mathbf{x}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}.$$

問



g : θ-回転

このとき $g \circ f$ の表現行列を求めよ。

答　直接の作図により $f\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}-1/2\\\sqrt{3}/2\end{pmatrix}$,　$f\left(\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}\sqrt{3}/2\\1/2\end{pmatrix}$.

よって　$f(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix}-1/2 & \sqrt{3}/2\\\sqrt{3}/2 & 1/2\end{pmatrix}\mathbf{x}$　したがって

$$(g\circ f)(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1/2 & \sqrt{3}/2\\\sqrt{3}/2 & 1/2\end{pmatrix}\mathbf{x} = \begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\cos\theta - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta & \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta - \frac{1}{2}\sin\theta\\-\frac{1}{2}\sin\theta + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta & \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta + \frac{1}{2}\cos\theta\end{pmatrix}\mathbf{x}.$$