問　$\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ の正規化 $\mathbf{a}'$ は $\mathbf{a}' = \frac{1}{|\mathbf{a}|}\mathbf{a}$ で与えられる.

答　$\frac{1}{|\mathbf{a}|} > 0$ より $\mathbf{a}$ と $\mathbf{a}'$ は同じ向き.

$$(\mathbf{a}', \mathbf{a}') = \left(\frac{1}{|\mathbf{a}|}\mathbf{a}, \frac{1}{|\mathbf{a}|}\mathbf{a}\right) = \frac{1}{|\mathbf{a}|^2}\underbrace{(\mathbf{a}, \mathbf{a})}_{|\mathbf{a}|^2} \quad (\because \text{線形性})$$

$$= 1.$$

$\therefore |\mathbf{a}'| = 1$. よって $\mathbf{a}'$ は $\mathbf{a}$ の正規化である.

問： $x=\begin{pmatrix}2\\8\end{pmatrix}$, $y=\begin{pmatrix}-3\\-2\end{pmatrix}$ がなす角 θ の $\cos\theta$ を求めよ.

答： $(x, y) = -6-16 = -22.$

$$|x| = \sqrt{(x, x)} = \sqrt{4+64} = \sqrt{68} = 2\sqrt{17}.$$

$$|y| = \sqrt{(y, y)} = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}.$$

$$\therefore \cos\theta = \frac{(x, y)}{|x|\,|y|} = \frac{-22}{2\sqrt{17}\cdot\sqrt{13}} = -\frac{11}{\sqrt{221}}.$$

よって θ は ~~鋭~~ 鈍角 $(\theta > 90^\circ)$ である.

問： $x=\begin{pmatrix}4\\-3\end{pmatrix}$, $y=\begin{pmatrix}b\\-4\end{pmatrix}$ は直交している, b を求めよ.

また そのときの y の正規化を求めよ.

答： $(x, y) = 4b+12$

$x \perp y \iff (x, y) = 0$ より $4b+12=0$ $\therefore b=-3.$

このとき, $y=\begin{pmatrix}-3\\-4\end{pmatrix}$. y を正規化すると,

$$y' = \frac{1}{|y|}y = \frac{1}{\sqrt{9+16}}\begin{pmatrix}-3\\-4\end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix}-3\\-4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-3/5\\-4/5\end{pmatrix}.$$

問： $a=\begin{pmatrix}-1\\\beta\end{pmatrix}$, $b=\begin{pmatrix}\alpha\\-3\end{pmatrix}$, $c=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ は次の条件をみたす.

(i) $a \perp b$

(ii) $|a| = 2$

(iii) b と c のなす角 θ は $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ (90°).

α, β を求めよ.

答： $(\mathbb{a}, \mathbb{b}) = -\alpha - 3\beta = 0.$

$|\mathbb{a}| = \sqrt{(\mathbb{a}, \mathbb{a})} = \sqrt{1+\beta^2} = 2$

$\therefore\ 1+\beta^2 = \cancel{2}\,4 \iff \beta^2 = \cancel{1}\,3 \iff \beta = \pm \cancel{1}\sqrt{3}.$

$\therefore\ \alpha = -3\beta = \mp 3\sqrt{3}.$ $\therefore \begin{cases} \alpha = -3\sqrt{3} \\ \beta = \cancel{\pm}\sqrt{3} \end{cases}, \begin{cases} \alpha = 3\sqrt{3} \\ \beta = \cancel{-1}.\ -\sqrt{3} \end{cases}$

最後に

$(\mathbb{b}, \mathbb{c}) = \alpha$, 鋭角 θ が $0 < \theta < \frac{\pi}{2} \iff (\mathbb{b}, \mathbb{c}) < 0$

$\iff \alpha < 0$

よって求める α, β は $\alpha = \cancel{3}\ -3\sqrt{3},\ \beta = \cancel{1}\sqrt{3}.$