問：$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$ を直交行列で対角化せよ．

解答：固有値 $-3, 2$. それぞれの固有空間は

$$V(-3) = V(\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}), \quad V(2) = V(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}).$$

それぞれの基底は直交する．正規化して

$$V(-3) = V(\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}), \quad V(2) = V(\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}).$$

これより

$$P = \begin{pmatrix} \frac{-1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$$

とおくと，P は直交行列となり，このとき，

$$P^{-1}AP \ \ (\text{または } {}^tPAP) = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$