

[問]: $y = f(x)$ のグラフと $y = f^{-1}(x)$ のグラフは $y = x$ に関して対称であることを確かめよ.

[解答]: $y = f(x)$ と $x = f^{-1}(y)$ は同じ主張であるから,

$$x = f^{-1}(f(x))$$

が成り立つ. これは二つの関数のグラフが $y = x$ について対称であることを示している.

[問]: $\sin^{-1} \frac{3}{5} = \tan^{-1} x$ をみたす x を求めよ.

[解答]: 両辺を y とおく. すると,

$$\begin{aligned} \sin y &= \frac{3}{5}, & -\frac{\pi}{2} &\leq y \leq \frac{\pi}{2}, \\ \tan y &= x, & -\frac{\pi}{2} &< y < \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

これらの条件が「かつ」で成り立つ. $\sin y > 0$ だから

$$0 < y < \frac{\pi}{2}$$

でなければならない. 恒等式から

$$1 + \tan^2 y = \frac{1}{\cos^2 y} = \frac{1}{1 - \sin^2 y} = \frac{25}{16}$$

ゆえに

$$\tan y = \pm \frac{3}{4}.$$

y の条件より

$$x = \tan y = \frac{3}{4}.$$