微分積分学 I

2007 年 6 月 20 日

[**問**]: $f(x) = x^2 e^{-x}$ のグラフをかけ.

[解答]: $f'(x) = e^{-x}(2-x)x$. よって,

$$x < 0,\ x > 2 \implies f'(x) < 0 \implies f(x) \text{ は減少}$$

$$0 < x < 2 \implies f'(x) > 0 \implies f(x) \text{ は増加}$$

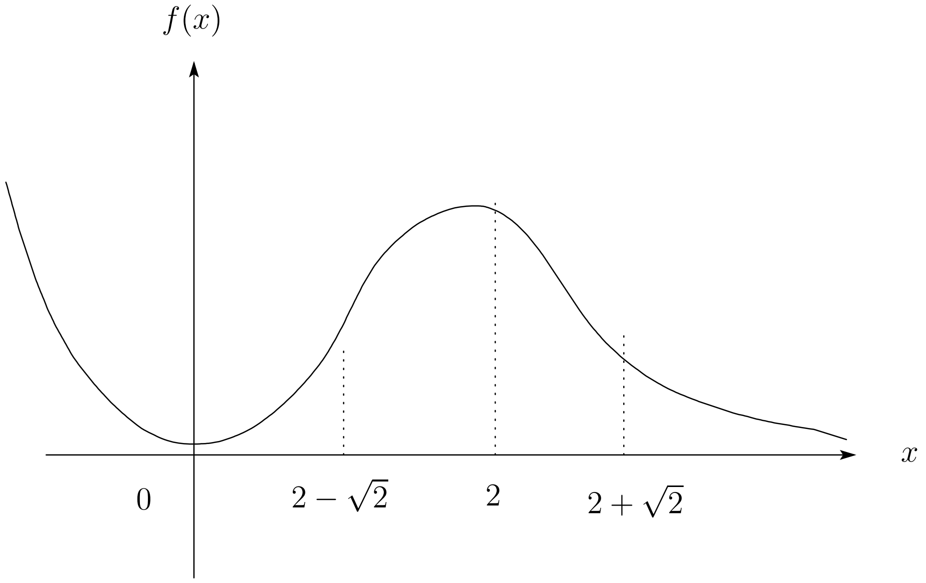
$f''(x) = e^{-x}(x^2 - 4x + 2) = e^{-x}(x-\alpha)(x-\beta)$, $\alpha = 2 - \sqrt{2}$, $\beta = 2 + \sqrt{2}$. よって,

$$x < 2 - \sqrt{2},\ x > 2 + \sqrt{2} \implies f''(x) > 0 \implies f(x) \text{ は下に凸}$$

$$2 - \sqrt{2} < x < 2 + \sqrt{2} \implies f''(x) < 0 \implies f(x) \text{ は上に凸.}$$

$f'(x) = 0$ なる x を求めると, $x = 0, 2$. このとき, $0 < 2 - \sqrt{2}$ だから $f''(0) > 0$. ゆえに $f(0)$ は極小値. 一方, $2 - \sqrt{2} < 2 < 2 + \sqrt{2}$ だから $f''(2) < 0$. ゆえに, $f(2)$ は極大値.

加えて, $f(0) = 0$, $f(x) > 0$ $(x > 0)$, $f(x) \to \infty$ $(x \to \infty)$ であることに注意してグラフをかくと以下のようになる.



[**問**]：$f(x) = \cos 3x$ の $x = \frac{\pi}{2}$ における 3 次のテイラー.

[解答]：

$$\cos 3x = 3x - \frac{3\pi}{2} + \frac{9\sin 3c}{2}(x - \frac{\pi}{2})^3, \quad c \text{ は } \tfrac{\pi}{2} \text{ と } x \text{ の間}$$

[**問**]：$f(x) = \sin^{-1} x$ の 4 次のマクローリン.

[解答]：

$$\sin^{-1} x = x + \frac{x^3}{6} + \frac{c(2c^2+3)(1-c^2)^{-7/2}}{8}x^4, \quad c \text{ は } 0 \text{ と } x \text{ の間}$$

[**問**]：$f(x) = \log(1+2x)$ の 5 次のマクローリン.

[解答]：

$$\log(1+2x) = 2x - 2x^2 + \frac{8}{3}x^3 - 4x^4 + \frac{32(1+2c)^{-5}}{5}x^5, \quad c \text{ は } 0 \text{ と } x \text{ の間}$$

K.U.