

[問]: $[a, b]$ で $f(x) \geq 0$, $\int_a^b f(x)dx = 0$ ならば $[a, b]$ のすべての点 x で $f(x) = 0$ であることを示せ .

[解答]: $\int_a^b f(x)dx$ をリーマン和で近似すると, 分割 $\Delta : x_{i-1} < x_i$,

$$M_i = \max_{x_{i-1} \leq x \leq x_i} f(x)$$

について, 十分に大きな n を取って

$$S_\Delta = \sum_{i=1}^n M_i(x_i - x_{i-1})$$

で与えられる . $f(x) \geq 0$ だからすべての i について $M_i \geq 0$. $\int_a^b f(x)dx = 0$ であるから $\sum_{i=1}^n M_i(x_i - x_{i-1}) = 0$ とおくと, 結局, すべての i で $M_i = 0$ でなければならない . これは $f(x) = 0$ を示している .

K.U.