微積 II

2007.10.11

問：$\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^3}{x^2+y^4} = 0$ を示せ.

答：相加相乗平均により

$$x^2+y^4 = |x|^2+|y|^4 \geqq 2\sqrt{|x|^2|y|^4} = 2|x||y|^2$$

・$x \neq 0$ かつ $y \neq 0$ ならば

$$\left|\frac{xy^3}{x^2+y^4}\right| = \frac{|x||y|^3}{|x|^2+|y|^4} \leqq \frac{|x||y|^3}{2|x||y|^2} = \frac{|y|}{2}$$

$(x,y)\to(0,0)$ のとき $|y|\to 0$ だから $\left|\dfrac{xy^3}{x^2+y^4}\right| \to 0$

・$x=0$ のときは

$$\frac{xy^3}{x^2+y^4} = \frac{0}{0+y^4} = 0$$

・$y=0$ のときも

$$\frac{xy^3}{x^2+y^4} = \frac{0}{x^2+0} = 0.$$

以上からすべての近づき方で 0 へ近づく.

$$\therefore \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^3}{x^2+y^4} = 0.$$

問　$f(x,y) = \dfrac{xy^2}{x^2+y^2}$, $(x,y)\neq(0,0)$ が原点において連続となるように f の原点における値を定義せよ.

答　$\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^2} = 0$ であるから

$f(0,0) = 0$ と定義すれば

$$f(0,0) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^2}$$

をみたす.

問　偏微分せよ.

(1) $f(x,y) = \dfrac{xy^2}{x^2+y^2}$　　　(2) $f(x,y) = e^{-\frac{y}{x}}$

答 (1) $f_x = \dfrac{y^2(x^2+y^2) - xy^2 \cdot 2x}{(x^2+y^2)^2} = \dfrac{y^2(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2}$

$$f_y = \frac{2xy(x^2+y^2) - xy^2 \cdot 2y}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2x^3y}{(x^2+y^2)^2}$$

(2) $f_x = e^{-\frac{y}{x}} \times \dfrac{y}{x^2} = \dfrac{y e^{-\frac{y}{x}}}{x^2}$

$$f_y = e^{-\frac{y}{x}} \times \left(-\frac{1}{x}\right) = -\frac{e^{-y/x}}{x}$$