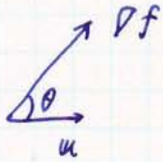
問　方向微分係数が最大となる方向 u を求めよ.

答:　$f'_u(x) = \nabla f \cdot u$ より



$$|f'_u(x)| = |\nabla f|\,|u|\cos\theta$$

$$= |\nabla f|\cos\theta \quad (\because |u| = 1)$$

よって $\theta = 0$ のとき $\cos\theta = 1$ で最大. つまり u が ∇f と同じ向きのとき $f'_u(x)$ の大きさは最大となる。

問　$f(x,y) = e^x \log(1+xy)$ について方向 $(-1, 2)$ の方向微分係数を求めよ.

答　$(-1, 2)$ と同じ向きの大きさ 1 のベクトルは $\left(\underset{\alpha}{\dfrac{-1}{\sqrt{5}}}, \underset{\beta}{\dfrac{2}{\sqrt{5}}}\right) = u$

$$f_x = e^x \log(1+xy) + e^x \cdot \frac{y}{1+xy}$$

$$= e^x\left(\log(1+xy) + \frac{y}{1+xy}\right)$$

$$f_y = e^x \cdot \frac{x}{1+xy}$$

以上から

$$f'_u(x) = \frac{-1}{\sqrt{5}} f_x + \frac{2}{\sqrt{5}} f_y = \frac{-e^x}{\sqrt{5}}\left(\log(1+xy) + \frac{y}{1+xy}\right)$$

$$+ \frac{2e^x}{\sqrt{5}} \cdot \frac{x}{1+xy}$$

$$= \frac{e^x}{\sqrt{5}}\left\{-\log(1+xy) + \frac{2x-y}{1+xy}\right\}.$$

問　$\nabla f = 0$ ならば f は定数関数であることを示せ.

答　平均値の定理から

$$f(x,y) = f(a,b) + \left((x-a)\frac{\partial}{\partial x} + (y-b)\frac{\partial}{\partial y}\right) f(a+\theta(x-a),\ b+\theta(y-b)),$$

$$0<\theta<1$$

$\nabla f = 0$ より

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a+\theta(x-a),\ b+\theta(y-b)) = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(a+\theta(x-a),\ b+\theta(y-b)) = 0.$$

$$\therefore\ f(x,y) = f(a,b)\ (\text{定数}).$$

問　$f(x,y) = e^y \log|1-3x|$ の点 $(1,1)$ における 3次の テイラーの定理を求めよ.

問題を間違えました.
絶対値をつけて!

答　$f(1,1) = e\log 2$

$f_x = e^y \cdot \frac{-3}{1-3x}$　　$f_x(1,1) = \frac{3}{2}e$

$f_y = e^y \log|1-3x|$　　$f_y(1,1) = e\log 2$

$f_{xx} = e^y\, 3(1-3x)^{-2}(-3)$

$= -9e^y(1-3x)^{-2}$　　$f_{xx}(1,1) = -\frac{9}{4}e$

$f_{xy} = e^y \cdot \frac{-3}{1-3x}$　　$f_{xy}(1,1) = \frac{3}{2}e$

$f_{yy} = e^y \log|1-3x|$　　$f_{yy}(1,1) = e\log 2$

$f_{xxx} = 18e^y(1-3x)^{-3}(-3)$

$= -54e^y(1-3x)^{-3}$　　~~$f_{xxx}(1,1) = \frac{54}{8}e = \frac{27}{4}e$~~

$f_{xxy} = -9e^y(1-3x)^{-2}$　　~~$f_{xxy}(1,1) = -\frac{9}{4}e$~~

$f_{xyy} = e^y \cdot \frac{-3}{1-3x}$　　~~$f_{xyy}(1,1) = \frac{3}{2}e$~~

$f_{yyy} = e^y \log|1-3x|$　　~~$f_{yyy}(1,1,1) =$~~

以上から

$$f(x,y) = f(1,1) + \left((x-1)\frac{\partial}{\partial x} + (y-1)\frac{\partial}{\partial y}\right) f(1,1)$$

$$+ \frac{1}{2!}\left((x-1)\frac{\partial}{\partial x} + (y-1)\frac{\partial}{\partial y}\right) f(1,1)$$

$$+ \frac{1}{3!}\left((x-1)\frac{\partial}{\partial x} + (y-1)\frac{\partial}{\partial y}\right) f(1+\theta(x-1),\ 1+\theta(y-1)),$$

$$0 < \theta < 1.$$

$$= e\log 2 + \frac{3e}{2}(x-1) + (e\log 2)(y-1)$$

$$+ \frac{1}{2}\left\{ (x-1)^2\cdot\left(-\frac{9}{4}e\right) + 2(x-1)(y-1)\frac{3}{2}e + (y-1)^2\cdot e\log 2 \right\}$$

$$+ \frac{1}{6}\left\{ (x-1)^3(-54)e^{1+\theta(y-1)}\cdot\left(1-3(1+\theta(x-1))\right)^{-3}\right.$$

$$+ 3(x-1)^2(y-1)(-9)e^{1+\theta(y-1)}\left(1-3(1+\theta(x-1))\right)^{-2}$$

$$+ 3(x-1)(y-1)^2(-3)e^{1+\theta(y-1)}\cdot\left(1-3(1+\theta(x-1))\right)^{-1}$$

$$\left. + (y-1)^3 e^{1+\theta(y-1)}\cdot\log\left|1-3(1+\theta(x-1))\right| \right\}.$$

//.