

問 テイラーの定理の証明において,

$$\varphi(t) = f(a+th, b+tk), \quad t \in \mathbb{R}$$

$\Rightarrow \varphi''(0)$ を計算せよ.

x, y を $x = a+th, y = b+tk$ とおくと,

答
$$\varphi'(t) = f_x \frac{dx}{dt} + f_y \frac{dy}{dt} = h f_x(a+th, b+tk) + k f_y(a+th, b+tk)$$

もう一度合成関数の微分法より

$$\begin{aligned} \varphi''(t) &= h \left(f_{xx} \frac{dx}{dt} + f_{xy} \frac{dy}{dt} \right) + k \left(f_{yx} \frac{dx}{dt} + f_{yy} \frac{dy}{dt} \right) \\ &= h^2 f_{xx}(a+th, b+tk) \\ &\quad + 2hk f_{xy}(a+th, b+tk) \\ &\quad + k^2 f_{yy}(a+th, b+tk) \end{aligned}$$

(ここで $f \in C^2$ 級として, $f_{yx} = f_{xy}$ を用いた.)

よって

$$\varphi''(0) = \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right)^2 f(a+0h, b+0k). \quad //$$