微積 II

2007. 11. 22.

問　極値をもとめよ.

(1)　$f(x,y) = x^2+y^2+xy-4x-5y$

$$\left.\begin{array}{l} f_x = 2x+y-4=0 \\ f_y = 2y+x-5=0 \end{array}\right\} \Rightarrow (x,y)=(1,2) \cdots \text{停留点}$$

極値の判定.

$f_{xx}=2$, $f_{xy}=1$, $f_{yy}=2$

$\Delta = f_{xy}(1,2)^2 - f_{xx}(1,2)\cdot f_{yy}(1,2) = 1-2\cdot 2 = -3 < 0.$

$f_{xx}(1,2) = 2 > 0$

よって　$f(1,2) = 1+4+2-4-10 = -7$　は極小値.

(2)　$f(x,y) = xy(1-4x-2y)$

$f_x = y(1-4x-2y) + xy(-4) = y(1-4x-2y-4x)$

$= y(1-8x-2y) = 0$

$f_y = x(1-4x-2y) + xy(-2) = x(1-4x-2y-2y)$

$= x(1-4x-4y) = 0$

①式より

$\Rightarrow$ $y=0$ または $1-8x-2y=0$

②式より

$x=0$ または $1-4x-4y=0$

したがって，すべての可能性は

$\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$, $\begin{cases} y=0 \\ 1-4x-4y=0 \end{cases}$, $\begin{cases} 1-8x-2y=0 \\ x=0 \end{cases}$, $\begin{cases} 1-8x-2y=0 \\ 1-4x-4y=0. \end{cases}$

これらをすべて解くと、

$(x,y)=(0,0),\ (\frac{1}{4},0),\ (0,\frac{1}{2}),\ (\frac{1}{12},\frac{1}{6})$ ‥‥ 停留点。

極値の判定、

$f_{xx}=y(-8)=-8y$,

$f_{xy}=1-8x-2y+y(-2)=1-8x-4y$

$f_{yy}=x(-4)=-4x$.

$\therefore \Delta(x,y)=f_{xy}{}^2-f_{xx}\cdot f_{yy}=(1-8x-4y)^2-(-8y)\cdot(-4x)$

$=\underline{(1-8x-4y)^2-32xy}$.

$\Delta(0,0)=1>0$, $\therefore f(0,0)=0$ は極値ではない。

$\Delta(\frac{1}{4},0)=1>0$, $\therefore f(\frac{1}{4},0)=0$ ―――〃―――

$\Delta(0,\frac{1}{2})=1>0$ $\therefore f(0,\frac{1}{2})=0$ ―――〃―――

$\Delta(\frac{1}{12},\frac{1}{6})=(1-\frac{2}{3}-\frac{2}{3})^2-32\cdot\frac{1}{12}\cdot\frac{1}{6}$

$=\frac{1}{9}-\frac{4}{9}=\frac{-1}{3}<0$.

$f_{xx}(\frac{1}{12},\frac{1}{6})=-8\cdot\frac{1}{6}=-\frac{4}{3}<0$.

よって. $f(\frac{1}{12},\frac{1}{6})=\frac{1}{216}$ は極大値.

(3) $f(x,y)=x^3+y^3-6xy$

$$\left.\begin{array}{l} f_x=3x^2-6y=0 \\ f_y=3y^2-6x=0 \end{array}\right\}$$

①を②へ代入, $0=3(\frac{1}{2}x^2)^2-6x=\frac{3}{4}x^4-6x=\frac{3}{4}x(x^3-8)$

$=\frac{3}{4}x(x-2)\underbrace{(x^2+2x+2)}_{\vee\atop 0}$

$\therefore\ x=0$ または 2. ①へ代入すると

$x=0 \Rightarrow y=0$

$x=2 \Rightarrow y=2$.

$\therefore\ (x,y)=(0,0),\ (2,2)$

これらは②式もみたすので、これらが停留点。

極値の判定、

$f_{xx}=6x,\quad f_{xy}=-6,\quad f_{yy}=6y$

$\therefore\ \Delta(x,y)=f_{xy}^2-f_{xx}\cdot f_{yy}=36-36xy$

$\Delta(0,0)=36>0 \quad \therefore\ f(0,0)=0$ は極値ではない。

$\Delta(2,2)=36-36\cdot 2\cdot 2<0$.

$f_{xx}(2,2)=\underset{\sim\sim}{12>0}$.

よって $f(2,2)=8+8-6\cdot 2\cdot 2=-8$ は ~~極大値~~ 極小値.

(4) $f(x,y)=xy+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}.\quad (x\neq 0,\ y\neq 0)$.

$$\left.\begin{aligned} f_x &= y-\frac{1}{x^2}=0 \\ f_y &= x-\frac{1}{y^2}=0 \end{aligned}\right\}$$

①を②へ代入、

$0=x-x^4=x(1-x^3)$

$=x(1-x)\underbrace{(1+x+x^2)}_{>0}$

$x\neq 0$ より $x=1$, ①へ代入すると $y=1$.

$\therefore\ (x,y)=(1,1)$.

これは②式もみたすのでこれが停留点、.

極値の判定、

$f_{xx}=2x^{-3},\quad f_{xy}=1,\quad f_{yy}=2y^{-3}$

$\Delta(x,y) = f_{xy}^2 - f_{xx} \cdot f_{yy}$

$= 1 - 2x^{-3} \cdot 2y^{-3} = 1 - 4x^{-3}y^{-3}$

$\therefore \Delta(1,1) = -3 < 0$

$f_{xx}(1,1) = 2 > 0$.

よって $f(1,1) = 3$ は 極小値