微分積分学II 小テスト

2007年6月20日

[**問**]: $f(x,y)=e^{-x+2y}$ の3次のマクローリンの定理をかけ.

[解答]: 3次のマクローリンは

$$f(h,k)=f(0,0)+(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial x})f(0,0)+\frac{1}{2!}(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial x})^2 f(0,0)$$
$$+\frac{1}{3!}(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial x})^3 f(\theta h,\theta k),\quad 0<\theta<1.$$

直接の計算から $f(0,0)=1$, $f_x=-e^{-x+2y}$, $f_y=2e^{-x+2y}$, $f_{xx}=e^{-x+2y}$, $f_{xy}=-2e^{-x+2y}$, $f_{yy}=4e^{-x+2y}$, $f_{xxx}=-e^{-x+2y}$, $f_{xxy}=2e^{-x+2y}$, $f_{xyy}=-4e^{-x+2y}$, $f_{yyy}=8e^{-x+2y}$. よって, $f_x(0,0)=-1$, $f_y(0,0)=2$, $f_{xx}(0,0)=1$, $f_{xy}(0,0)=-2$, $f_{yy}(0,0)=4$. 代入して,

$$f(h,k)=1-h+2k+\frac{h^2}{2}-2hk+2k^2+\frac{e^{-\theta h+2\theta k}}{6}(-h^3+6h^2k-12hk^2+8k^3),\quad 0<\theta<1.$$

K.U.