6/7　微分積分学Ⅱ

例：$f(x,y) = e^{-2x}\cos 3y$ について $f(10^{-2}, 3\times10^{-2})$ の近似値を全微分の概念に従って求めよ.

$(0,0)$ における f の全微分を求めると,

$$dz = f_x(0,0)\,dx + f_y(0,0)\,dy$$

$$f_x = -2e^{-2x}\cos 3y, \quad f_y = -3e^{-2x}\sin 3y$$

$$\therefore f_x(0,0) = -2, \quad f_y(0,0) = 0$$

$\therefore\ dz = -2dx$. よって $dx = 10^{-2} - 0 = 10^{-2}$

$$dz = f(10^{-2}, 3\times10^{-2}) - f(0,0)$$
$$= f(10^{-2}, 3\times10^{-2}) - 1$$

とおくと,

$$f(10^{-2}, 3\times10^{-2}) = 1 - 2\times10^{-2} = \underline{0.98}$$

例：$z = f(x,y)$, $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$

$\Rightarrow z_r = f_x\cdot\cos\theta + f_y\sin\theta$

このとき $z_{r\theta}$ を求めよ.

$$z_{r\theta} = (z_r)_\theta = (f_{xx}\cdot x_\theta + f_{xy}y_\theta)\cos\theta + f_x(\cos\theta)'$$
$$+ (f_{yx}x_\theta + f_{yy}y_\theta)\sin\theta + f_y(\sin\theta)'$$

$$= (f_{xx}(-r\sin\theta) + f_{xy}\cdot r\cos\theta)\cos\theta + f_x(-\sin\theta)$$
$$+ (f_{yx}(-r\sin\theta) + f_{yy}\,r\cos\theta)\sin\theta + f_y\cos\theta$$

$$= -f_{xx}\cdot r\sin^2\theta + f_{xy}\,r\cos^2\theta - f_{yx}r\sin^2\theta + f_{yy}\cdot r\cdot\sin\theta\cos\theta$$
$$- f_x\sin\theta + f_y\cos\theta.$$