7/12 微積 II

問 $f(x,y) = x^2 + y^3 - xy$ の極値をもとめよ.

$$\begin{cases} f_x = 2x - y = 0 \\ f_y = 3y^2 - x = 0 \end{cases}$$

$y = 2x$ を代入, $3(2x)^2 - x = 0$ ∴ $12x^2 - x = 0$

∴ $12x\left(x - \frac{1}{12}\right) = 0$

∴ $x = 0,\ \frac{1}{12}$

$x = 0$ のときは $y = 0$

$x = \frac{1}{12}$ のときは $y = \frac{1}{6}$ よって停留点は

$(x,y) = (0,0),\ \left(\frac{1}{12}, \frac{1}{6}\right)$.

$f_{xx} = 2,\ f_{yy} = 6y,\ f_{xy} = -1$.

∴ $\Delta = f_{xy}^2 - f_{xx}f_{yy} = 1 - 12y$

$\Delta(0,0) = 1 > 0$ ∴ $\overset{0}{f(0,0)}$ は極値ではない

$\Delta\left(\frac{1}{12}, \frac{1}{6}\right) = 1 - 12\cdot\frac{1}{6} = -1 < 0$. $f_{xx} = 2 > 0$ であるから

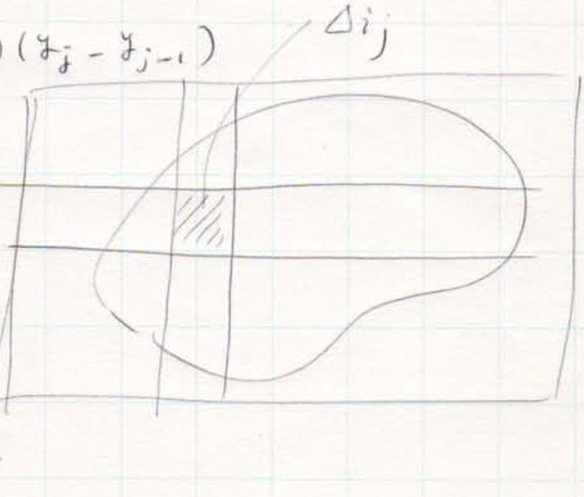
$= f\left(\frac{1}{12}, \frac{1}{6}\right)$ は極小値.

---

問: 重積分の定義から $\iint_D 1\cdot dxdy$ をもとめよ.

リーマン和 $V_\Delta = \sum_{i,j} M_{ij}(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})$

$= \sum_{\Delta_{ij}\cap D \neq \phi} 1\cdot(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})$




$i = 1, 2, \cdots, n,\quad j = 1, 2, \cdots, m$ において

$n \to \infty,\ m \to \infty$ とするならば,

$$\sum_{\Delta_{ij}\cap D \neq \phi} 1\cdot(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1}) \to \underbrace{|D|}_{D\text{の面積}}$$

∴ $\iint_D 1\cdot dxdy = |D|$.