微分方程式

2007 年 5 月 26 日

[問題]：$y' - y = \sin^2 x$ の一般解を $\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$ を用いて重ね合わせの原理に従って求めよ．

[解答]：まず，

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}q_1 - \frac{1}{2}q_2, \quad q_1(x) = 1, \quad q_2(x) = \cos 2x$$

とみる．そして，２つの方程式

$$\begin{aligned} y' - y &= q_1 = 1 \\ y' - y &= q_2 = \cos 2x \end{aligned}$$

の一般解を求め，それぞれ y_1, y_2 とする．y_1, y_2 を求めよう．

$y' - y = 0$ の一般解は $y = Ce^x$．また，$y' - y = 1$ のひとつの解として，$y = -1$ があるので，$y' - y = 1$ の一般解は $y_1 = -1 + Ce^x$ である．

一方，$C = 1$ として $y_0 = e^x$ とおく．$u = \frac{y}{y_0}$ とおいて，$y' - y = \cos 2x$ の一般解 y に対して，u の条件を求めると，

$$u' = e^{-x}\cos 2x.$$

部分積分により

$$\begin{aligned} u &= \int e^{-x}\cos 2x dx + C \\ &= -\frac{1}{5}e^{-x}\cos 2x + \frac{2}{5}e^{-x}\sin 2x + C \end{aligned}$$

ゆえに一般解 y_2 は

$$y_2 = -\frac{1}{5}\cos 2x + \frac{2}{5}\sin 2x + Ce^x.$$

重ね合わせの原理から y_1, y_2 を用いて，求めたい一般解は

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{2}y_1 - \frac{1}{2}y_2 \\ &= -\frac{1}{2} + \frac{1}{10}\cos 2x - \frac{1}{5}\sin 2x + Ce^x. \end{aligned}$$

K.U.