4/22　　微分方程式

1. $y' = x^2 \log x$ の一般解？

2. $\begin{cases} y' = \dfrac{x}{\sqrt{1-x}} \\ y(0) = 0 \end{cases}$ の特殊解？

---

1. $y = \int x^2 \log x \, dx + C$

$= \dfrac{x^3}{3} \log x - \int \dfrac{x^3}{3} \cdot \dfrac{1}{x} \, dx + C$

$= \underline{\dfrac{x^3}{3} \log x - \dfrac{1}{9} x^3 + C}$.

2. $y = \int \dfrac{x}{\sqrt{1-x}} \, dx + C = \int \dfrac{1-t}{\sqrt{t}} (-dt) + C$ （$1-x=t$ で置換）

$= \int -t^{-1/2} + t^{1/2} \, dt + C = -2t^{1/2} + \dfrac{2}{3} t^{3/2} + C$

$= \underline{-2\sqrt{1-x} + \dfrac{2}{3}(1-x)^{3/2} + C}$.

$y(0)=0$ より $C = \dfrac{4}{3}$

$y = -2\sqrt{1-x} + \dfrac{2}{3}(1-x)^{3/2} + \dfrac{4}{3}$.

問：$y' = y^2 - 2xy^2$ の一般解？

$y' = y^2(1-2x) \Rightarrow \int \dfrac{1}{y^2} \, dy = \int (1-2x) \, dx + C$

$\therefore -y^{-1} = x - x^2 + C$

$\therefore y^{-1} = x^2 - x - C$

$\therefore y = \dfrac{1}{x^2 - x - C}$

さらに $y=0$ を自明解としてもつ.