5/20 微分方程式

例： $y' - 3x^2 y = x^2$ の一般解.

$y' - 3x^2 y = 0$ より $\int \frac{1}{y} dy = \int 3x^2 dx + C$

$\therefore \log|y| = x^3 + C \quad \therefore y = Ce^{x^3}$

$C = 1$ として $y_0 = e^{x^3}$ とおく. $u = \frac{y}{y_0}$, y を一般解, ならば,

$y' = (uy_0)' = u'y_0 + uy_0' = u'y_0 + 3x^2 \underbrace{uy_0}_{y}$

$\therefore y' - 3x^2 y = u'y_0 \quad \therefore u'y_0 = x^2 \quad \therefore u' = x^2 e^{-x^3}$

$\therefore u = \int x^2 e^{-x^3} dx + C = -\frac{1}{3} e^{-x^3} + C$

以上から

$y = uy_0 = \left(-\frac{1}{3}e^{-x^3} + C\right)e^{x^3} = \underline{-\frac{1}{3} + Ce^{x^3}}$.

例： $y' + xy = x^3 y^3$ の一般解.

両辺 $\times y^{-3}$,

$y^{-3}y' + xy^{-2} = x^3$. ここで $(y^{-2})' = -2y^{-3}y'$ だから

$-2y^{-3}y' - 2xy^{-2} = -2x^3$ から $z = y^{-2}$ とおくと,

$z' - 2xz = -2x^3$: 1階線形

$z' - 2xz = 0$ を解くと, $z = Ce^{x^2}$. $C = 1$ として, $z_0 = e^{x^2}$ と

おく. $u = \frac{z}{z_0}$, z を一般解, ならば,

$z' = (uz_0)' = u'z_0 + uz_0' = u'z_0 + 2x\underbrace{uz_0}_{z}$

$\therefore z' - 2xz = u'z_0$. よって $u'z_0 = -2x^3 \quad \therefore u' = -2x^3 e^{-x^2}$

$u = \int -2x^3 e^{-x^2} dx + C$

$$\therefore u = \int \underbrace{(-2x e^{-x^2})}_{(e^{-x^2})'} \cdot x^2 \, dx + C$$

$$= e^{-x^2} \cdot x^2 - \int e^{-x^2} \cdot 2x \, dx + C \qquad (\text{部分積分})$$

$$= e^{-x^2} x^2 + e^{-x^2} + C$$

$$= (1 + x^2) e^{-x^2} + C$$

以上から

$$z = u z_0 = \left((1+x^2) e^{-x^2} + C \right) e^{x^2} = (1+x^2) + C e^{x^2}$$

最後に

$$y = z^{-1/2} = \underline{(1 + x^2 + C e^{x^2})^{-1/2}}.$$