5/27 微分方程式.

問: $y' - \frac{y}{x} = x^2 y^4$ を 1階の線形方程式にせよ.

$\times y^{-4}$ $\quad y^{-4}y' - \frac{1}{x}y^{-3} = x^2$.

ここで $(y^{-3})' = -3y^{-4}y'$ だから

$$-3y^{-4}y' + \frac{3}{x}y^{-3} = -3x^2 \quad \text{とすると,}$$

$$(y^{-3})' + \frac{3}{x}(y^{-3}) = -3x^2.$$

$z = y^{-3}$ とおくと $\quad \underline{z' + \frac{3}{x}z = -3x^2}$

問 $\quad y' = -y\cos x + y^2 - \sin x$

(1) $p(x) = \cos x$, $q(x) = 1$, $r(x) = -\sin x$.

(2) $y_1 = a\cos x$ とおいて 解を求めよ.

代入すると $(a\cos x)' = -(a\cos x)\cos x + \cos^2 x - \sin x$

$\therefore \ -a\sin x = (1-a)\cos^2 x - \sin x \quad \Rightarrow \quad a = 1$ はみたす.

$\therefore y_1 = \cos x$ は解の1つ.

(3) ベルヌーイ型に せよ.

$$y' = -y\cos x + y^2 - \sin x$$
$$-)\ \ y_1' = -y_1\cos x + y_1^2 - \sin x$$
$$(y - y_1)' = -(y - y_1)\cos x + \underline{(y^2 - y_1^2)} = (\overset{y}{\cancel{y_1}} - y_1)(y - y_1 + 2y_1)$$

$y - y_1 = z$ とおくと,

$$z' = -z\cos x + z(z + 2\overset{=\cos x}{y_1})$$

$$\therefore \ \underline{z' - z\cos x = z^2}$$