6/3 微分方程式

例　$xy' - y = x^2$ の一般解をもとめよ.

$$y' - \frac{1}{x}y = x \quad : \quad 1階線形$$

まず $y' - \frac{1}{x}y = 0$ を解く.

$$\int \frac{1}{y}\,dy = \int \frac{1}{x}\,dx + C$$

$$\therefore \log|y| = \log|x| + C$$

$$\therefore \log\left|\frac{y}{x}\right| = C \qquad \therefore \frac{y}{x} = C \qquad \therefore y = Cx.$$

$C = 1$ として, $y_0 = x$ とおく. y をもとめたい一般解とするならば $u = \dfrac{y}{y_0}$ とおくとき,

$$y' = (uy_0)' = u'y_0 + uy_0' = u'y_0 + \frac{\overbrace{uy_0}^{y}}{x}$$

$$\therefore y' - \frac{y}{x} = u'y_0$$

$$\therefore u'y_0 = x$$

$$u' = 1$$

$$u = x + C$$

以上から

$$y = (x+C)y_0 = (x+C)x = \underline{Cx + x^2}$$

［別解］

$y = ax^2 + bx + c$ として解をみつける.

$y' = 2ax + b$

$xy' - y = x^2$ より

$x(2ax+b) - (ax^2+bx+c) = x^2$

$ax^2 + (-c) = x^2 \quad \therefore\ a = 1,\ c = 0.$

よって $b = 0$ として $y_1 = x^2$ は解である. そこで

$$
\begin{array}{rl}
 & xy' - y = x^2 \\
-) & xy_1' - y_1 = x^2 \\
\hline
 & x(y' - y_1') - (y - y_1) = 0
\end{array}
$$

$y - y_1 = z$ とおくと, $xz' - z = 0 \quad \therefore\ z' = \dfrac{z}{x}$ （変数分離形）

$$\int \frac{1}{z}\,dz = \int \frac{1}{x}\,dx + C$$

$$\therefore\ \log|z| = \log|x| + C$$

$$\therefore\ \log\left|\frac{z}{x}\right| = C$$

$$\therefore\ \frac{z}{x} = C \quad \therefore\ z = Cx.$$

以上から

$$y = y_1 + z = \underline{x^2 + Cx}.$$