6/10 微分方程式

問： $y' = 2y + e^{-y}$ の $y=0$ の近くの近似方程式を求め、
その一般解を与えよ.

$g(y) = 2y + e^{-y}$ とおく. $y=0$ で接線の方程式
で近似すると、 $g(y) \cong g(0) + g'(0)y = 1 + y$.
よって近似方程式 $y' = y+1$ を得る. 変数分離形より

$$\int \frac{1}{y+1}\,dy = \int dx + C$$

$$\therefore \log|y+1| = x + C$$

$$\therefore y+1 = Ce^{x} \qquad \therefore y = -1 + Ce^{x} \quad (一般解)$$

問：1. $y = c_1y_1 + c_2y_2$ を2階線形 $Ly=0$ の一般解とする。y_0 を $Lu=f(x)$
のある解とするとき、その一般解は $y = y_0 + c_1y_1 + c_2y_2$ で与えられる
ことを示せ.

$$\begin{array}{r} Ly = f(x) \\ -\underline{)\ Ly_0 = f(x)} \\ L(y-y_0) = 0 \end{array}$$

よって $y - y_0$ は $Ly=0$ の解.
ゆえに $y - y_0 = c_1y_1 + c_2y_2$

$$\therefore y = y_0 + c_1y_1 + c_2y_2$$

2. ロンスキー行列式を求めよ.

(1) $$W(e^{-3x}, e^{5x}) = \begin{vmatrix} e^{-3x} & e^{5x} \\ -3e^{-3x} & 5e^{5x} \end{vmatrix} = 5e^{2x} - (-3)e^{2x} = 8e^{2x}$$

(2) $$W(e^{-4x}, xe^{-4x}) = \begin{vmatrix} e^{-4x} & xe^{-4x} \\ -4e^{-4x} & e^{-4x} - 4xe^{-4x} \end{vmatrix}$$

$$= e^{-8x} - 4xe^{-8x} - \{-4xe^{-8x}\}$$

$$= e^{-8x}$$