6/17 微分方程式

例. (1) $y_1 = x$, $y_2 = 1$ が $y'' = 0$ の基本解であることを示せ

(2) $y'' = e^{-x}$ の一般解を求めよ.

(1) $y_1' = 1$, $y_1'' = 0$

$y_2' = 0$, $y_2'' = 0$ ∴ y_1, y_2 は解.

ロンスキー行列式 $W(x, 1) = \begin{vmatrix} x & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$.

よって y_1, y_2 は基本解.

(2) $y_0 = e^{-x}$ とおくと, $y_0'' = e^{-x}$ をみたす.

よって y_0 は $y'' = e^{-x}$ のある1つの解. (1) より $y'' = 0$

の一般解は $y_c = c_1 x + c_2 \cdot 1$ で与えられるから, 求める

一般解は $y = y_c + y_0 = c_1 x + c_2 + e^{-x}$.

例: 一般解を求めよ.

(1) $y'' - 4y' + 3y = 0$ (2) $y'' + 8y' + 16y = 0$.

(1) 特性方程式 $t^2 - 4t + 3 = 0$ を解くと

$(t-1)(t-3) = 0$ ∴ $t = 1, 3$ (2つの実解)

よって, 一般解 $y = c_1 e^{x} + c_2 e^{3x}$ を得る

(2) 同様に $t^2 + 8t + 16 = 0$ を解くと, $(t+4)^2 = 0$ ∴ $t = -4$

重解であるから, 一般解は $y = c_1 x e^{-4x} + c_2 e^{-4x}$.